

## Outils Mathématiques pour l'informatique

Jean-Luc Baril

Université de Bourgogne  
Labo. Le2i, UMR-CNRS 5158  
<http://jl.baril.u-bourgogne.fr>

September 13, 2017



## Planning

Semaine 11 Sept.: C1, C2

Semaine 18 Sept.: C3, TD1

Semaine 25 Sept.: TD2, TP1

Semaine 2 Oct.: C4, TP2

Semaine 9 Oct.: C5, TD1

Semaine 16 Oct.: TD2, TP1

Semaine 23 Oct.: TP2

Semaine 30 Oct.: Vacances

Semaine 4 déc.: Soutenance Projet



## Plan du cours

1. Introduction - Définitions
2. Notions de filtres - calcul matriciel
3. Etude d'un signal continu et discret - Théorie de Fourier
4. Application au traitement de l'image
6. Algorithme transformée de Fourier rapide
7. Applications (tatouage d'images, compression, ...)



## Introduction - Définitions

### **Objectifs**

- \* Acquérir les bases mathématiques pour le traitement de l'image
- \* Quelques notions de traitements d'images
  - Acquisition (représentation d'une image, matrices...)
  - Notion de filtres (produit de matrices, convolution...)
  - Rehaussement d'image (recadrage d'une fonction dans un intervalle)
  - Restauration d'image (notion de voisinage, frontière,...)
  - Détection de contour (voisinage, frontière,...)
  - Atténuation de contour (.....)



## Introduction - Définitions

### **Objectifs**

- \* Quelques notions de la théorie du signal
  - Décomposition d'une image en somme de signaux sinusoidaux(théorie de Fourier, transformée de Fourier continue et discrète)
  - Filtrage selon les fréquences d'un signal (transformée de Fourier, algorithme transformée de Fourier rapide, récursivité,...)



## 1. Introduction - Définitions

### Traitement de l'image

#### \* Méthodes pour la transformation d'images

- Amélioration de l'apparence
- Extraction d'informations
- Compression pour la transmission

#### \* Exemples

- Reconnaissance automatique des adresses
- Contrôle automatique de vision dans une chaîne de fabrication
- Reconnaissance de formes (domaine militaire)
- Compression d'image (internet et télé numérique)



## Définition d'une image:

- représentation d'une scène par la peinture, la sculpture, le dessin, photographie, film...
- Ensemble structuré d'informations qui après affichage sur un support (écran, toile, papier, ...) ont une signification pour l'oeil humain.

- Si  $x$  et  $y$  sont les coordonnées spatiales d'un point de l'image,  $I(x, y)$  est une fonction de l'intensité lumineuse et de la couleur.

- $I(x, y)$  signal analogique continue

Inexploitable par la machine  $\implies$  numérisation



## Définition : Image numérique

Image = Matrice de nombres entiers

Dans un Pixel (2D) (picture element)

- \* Scalaires = 1 valeur (niveaux de gris)
- \* Vecteurs = plusieurs valeurs (couleurs) (3 RGB) (Red - Green - Blue)

**Lors de l'acquisition, le signal analogique continu est numérisé (discrétisé)**

Perte d'informations lors de la discrétisation

- \* L'échantillonnage (sélection des points)
- \* La quantification (sélection de couleurs)

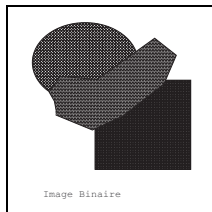




## 1. Introduction - Définitions

### 1.2.1 Images binaires

**Définition** : Image = Tableau de 0 et de 1 (0 noir, blanc 1)



sous scilab

```
M= [0 1 0; 1 0 1; 0 1 0]; imshow(M)
```



## Définition : image en niveaux de gris

Image = Tableau d'entiers compris entre 0 et  $L_{max}$

En général,  $L_{max}$  est de la forme de  $2^n - 1$ .

### Qualité d'une image

+ Qualité visuelle : Nombre de niveaux

+ Résolution : Capacité à distinguer deux détails proches.

Fonction du nombre de niveaux et du nombre de Pixels





## Images en niveaux de gris

### Place mémoire

Si  $n = 512$ , et s'il y a  $256 = 2^8$  niveaux de gris alors:

Si on code les niveaux de gris sur 8 bits (1 octet) alors la place mémoire utilisée est :

$512 \times 512 \times 1 = 0.25$  Megaoctets

#### sous scilab

Sous Scilab:

```
I=ones(4,1)*[(0:6)]
```

```
imshow(I)
```

```
I=imread('image.jpg')
```

```
imshow(I)
```



## Définition : Images en couleur

combinaison de trois images (RGB) (Red, green , blue)

Place mémoire image RGB = 3 fois celle pour le niveau de gris.  
Par exemple, avec 8 bits pour une couleur, on peut coder  $(2^8)^3$   
niveaux de couleurs.



## Formats d'images

\* **Image Bitmap (.bmp):** Matrice 2D de points (pixel - picture element)

- Adapté à l'affichage sur écran
- Adapté au traitement de l'image

\* **Image GIF (.gif):** Fichier fortement compressés (méthode LWZ) - Conservation d'une qualité très correcte.

- Le nombre maximal de couleurs contenu dans une image au format GIF est de 256.

- ABABABCABAC  $\longrightarrow$  Dictionnaire AB, BA, ABA, ABC, CA, ABAC

\* **Image TIFF (.tif):** Fichier fortement compressés (méthode Run Length Encoding)

- AAAAAHHHHTTTTTTTT → 5A4H7T

\* **Image JPEG (.jpg):** Fichier fortement compressés, mauvaise conservation de la qualité de l'image (Huffman)

- Codage de la phrase: COMMENT CA MARCHE



## Echantillonnage

### Résolution spatiale

La résolution spatiale ou géométrique est la distance la plus petite permettant de discriminer deux objets voisins.  
Par exemple, pour une image à 20 mètres de résolution, chaque pixel représente une superficie correspondant 20 x 20 mètres.

### Résolution relative

Nombre de prélèvements que fait l'appareil sur une longueur de 1 pouce (DPI, Dots per inch - 1 pouce=2,54cm)

- + Imprimante 300 DPI, Scanner 1200 DPI...
- Résolution absolue associée au capteur
- + Moniteur 1600x1200 pixels



## 1.4 Echantillonnage

### \* **Discrétisation du repère spatial**

- Passage à un nombre de données (Pixels) finis
- Adapté au traitement de l'image
- Résolution relative associée à la résolution spatiale





## 1.5 Quantification

### \* **Discrétisation du repère colorimétrique**

- Passage d'un signal analogique (infinité de couleurs) à un signal discret à  $2^N$  niveaux de couleurs

+ Pixels codés sur  $N$  bits

+ 8 bits  $\Rightarrow$  256 niveaux

+ 16 bits  $\Rightarrow$  65536 niveaux

+ 24 bits  $\Rightarrow$  16M de niveaux



## 1.5bis Vocabulaire

- \* **Bruit** Phénomène de brusque variation de l'intensité d'un pixel / pixels voisin
- \* **Contours** Frontière entre deux objets ou zones de l'images
- \* **Luminance** Degré de luminosité des points de l'image ~  
brillance
- \* **Contraste** Opposition marquée entre une région sombre L1  
et claire L2

$$C = \frac{L1 - L2}{L1 + L2}$$



## Opérations géométriques sur les images

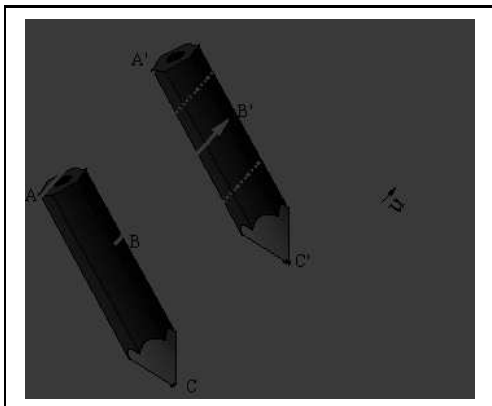
+ Translation de vecteur  $(X_0, Y_0)$

$$(X, Y) \implies (X + X_0, Y + Y_0)$$

+ Passage en coordonnées universelles  $(X, Y, Z)$  On rajoute une coordonnée fictive  $Z$

Expression matricielle

$X'$	=	1	0	$X_0$	$X$
$Y'$		0	1	$Y_0$	$Y$
1		0	0	1	1





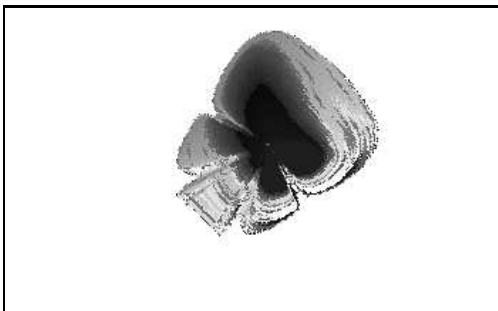
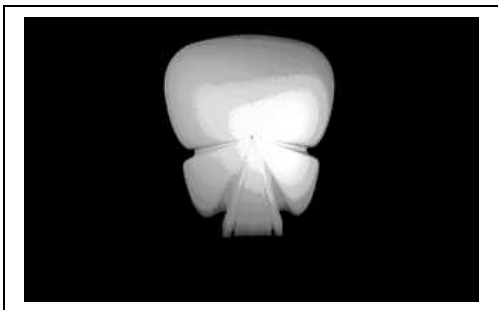
## Opérations géométriques sur les images

+ Mise à l'échelle

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline S_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & S_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

+ Rotation d'angle  $\theta$

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \hline \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

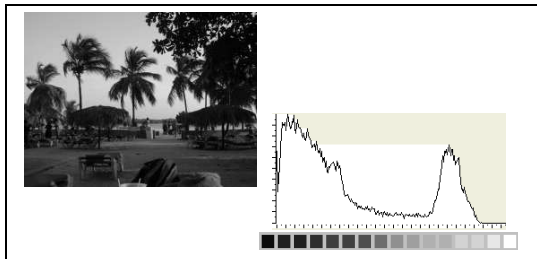




## Histogramme d'une image

- Fonctions représentant la fréquence d'apparition d'un niveau de gris

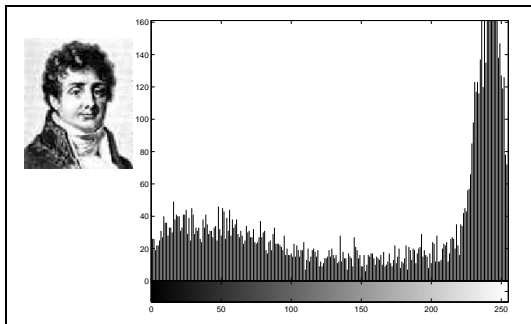
$$H(\text{Niv. gris}) = \text{card}\{\text{pixels de ce niv. de gris}\}$$





## Histogramme d'une image

Sous Scilab utiliser `histplot(I);`







## Rehaussement d'image

- Accentuer certaines caractéristiques pour analyser ou visualiser (contraste, contours, ..)
- Transformation de chaque niveau de gris en un autre
  - + Exemples : éclaircissement, assombrissement
  - + Exemples : égalisation histogramme (augmente les nuances)
  - + Exemples : étirement d'histogramme
  - + Transformation de voisinage (Théorie de Fourier)



## Etirement

- Utilisation au mieux de l'échelle des niveaux

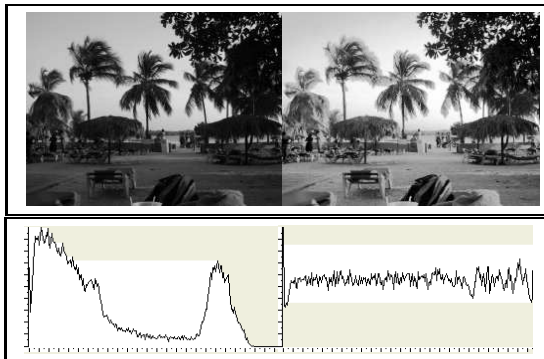
$$p'(x, y) = \alpha + \beta \cdot p(x, y)$$

On modifie chaque pixel en lui appliquant une transformation linéaire

+ **Exemples:** égalisation, tassement, rehaussement de l'histogramme

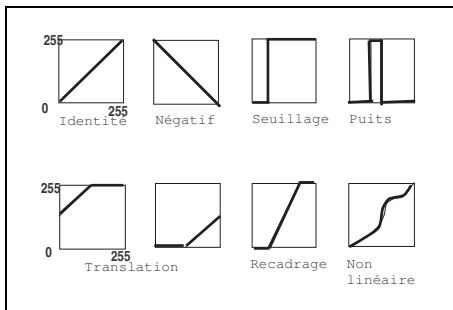


## Exemple





## Exemples



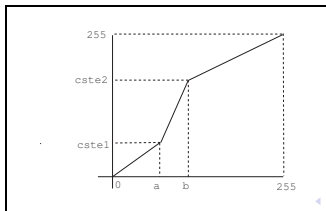


## Etirement du contraste

On pose  $v = f(u)$  le niveau de gris de l'image résultat qui remplace le niveau de gris de l'image initiale.

## Augmentation du contraste

$$v = \begin{cases} \alpha u & 0 \leq u \leq a \\ \beta(u - a) + \text{cste}_1 & a \leq u \leq b \\ \gamma(u - b) + \text{cste}_2 & b \leq u \leq 255 \end{cases}$$





## Découpage de l'image

On reprend la fonction précédente avec  $\alpha = \gamma = 0$ .

$$v = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq a \\ \beta(u - a) & a \leq u \leq b \\ cste_2 & b \leq u \leq 255 \end{cases}$$

## Compression de la dynamique des gris

$$v = cste \cdot \text{Log}(1 + u)$$

Eclaircit le foncé



## Linéarisation de l'histogramme

$$v = (g_{max} - g_{min})P(u) + g_{min}$$

$P(u)$  histogramme cumulé

Augmentation de la clarté de l'image par augmentation du contraste

## Histogramme exponentiel

$$v = g_{min} + \ln(1 - P(u))/cste$$

## Histogramme logarithmique

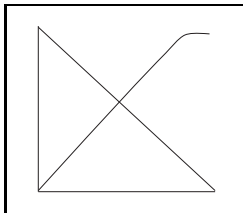
$$v = g_{min}(g_{max}/g_{min})^{P(u)}$$



## Linéarisation de l'histogramme

Exemple:  $h(u) = 1 - u$  pour  $u \in [0..1]$  et  
La linéarisation donne

$$P(u) = u - \frac{1}{2}u^2$$







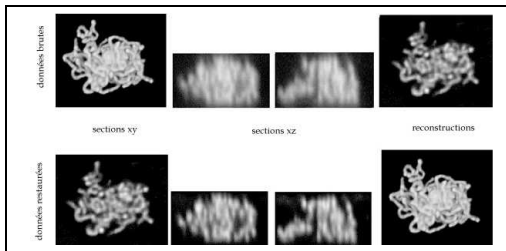
## 1.8 Restauration d'images

- Minimisation des dégradations

- Suppression de flou

Atténuation des bruits

Correction des distorsions géométriques





## 1.9 Analyses d'images

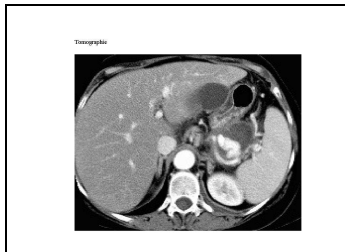
- Faire des mesures quantitatives
  - + Lecture étiquettes
  - + Mesure de la taille de cellules sanguines
  - + Utilisation robotique, armée
  - + Utilisation de la segmentation pour l'isolement

d'un objet



## 1.10 Reconstruction d'images à partir de projections

- Tomographie
- Images radar
  - Images médicales, scanner...





## 1.11 Compression de données

- Stockage d'images, LWZ, Shannon, .....
  - Image vidéo
  - Réduction à stocker sans perte significative d'information
- Exemples : Transmission TV, visioconférences, ...



## Notions de filtres

### Filtrage - Définition

Le filtrage est une opération qui consiste à appliquer une transformation à tout ou partie d'une image numérique.

Il y a deux sortes de filtres:

- + Filtrage linéaire : L'opération est linéaire
- + Filtrage non linéaire : L'opération n'est pas linéaire



## Exemple du filtre médian

On donne au pixel de coordonnée  $(x, y)$  la valeur médiane des voisins.

Exemple:

	4	10	11
I=	5	6	8
	10	7	3

La valeur médiane est 7

Remarque: transformation non linéaire, difficulté de mise en place

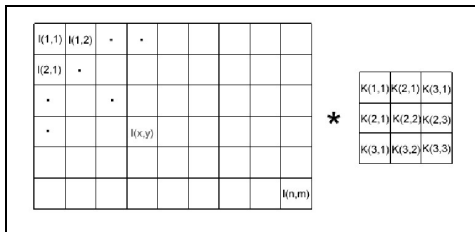
Effet: Lissage en préservant les contours



# Filtre de convolution

## Définition

Un produit de convolution est un opérateur mathématiques entre deux matrices.



$$I'(x, y) = \sum_{k, l \in \{1, 2, 3\}} I(x + k - 2, y + l - 2) K(k, l)$$

sous Scilab : `I'=imconv(I,K):`



## 2.2 Filtre passe haut

Ils permettent notamment d'accentuer les détails et le contraste, c'est la raison pour laquelle le terme de "filtre d'accentuation" est parfois utilisé.

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0





## 2.2 Filtre passe haut - Exemple

Image 5x5 d'une étoile dans le noir



## 2.2 Filtre passe haut





## 2.3 Filtre passe bas

A contrario, il adoucit les détails et réduit les bruits granuleux.

1	1	1
1	4	1
1	1	1

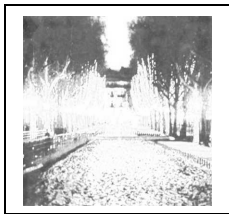


## 2.3 Filtre passe bas - Exemple

Image 5x5 d'un bruit dans le noir



## 2.3 Filtre passe bas





## 2.3 Filtre moyenne

Cas particulier du passe bas, il remplace chaque pixels par la moyenne des pixels adjacents et du pixel central.

$$\frac{1}{9} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$



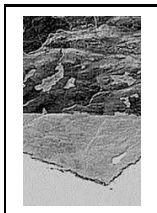
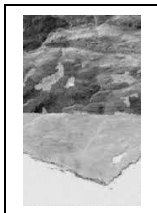
## 2.3 Filtre directionnel

Rehausse les caractéristiques suivant une direction donnée

-1	0	-1
0	5	0
-1	0	-1



## 2.3 Filtre directionnel







## 2.3 Filtre Laplacien

Met en valeur les détails qui ont une variation rapide de luminosité. Détecteur de contour, reconnaissance de formes (armée, satellites,...)

Filtre passe-haut très efficace

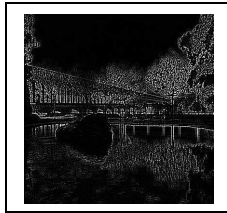
0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1



## 2.3 Filtre Laplacien





## Détection de contour

Filtres horizontal et vertical de Prewitt

$$I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Detecteurs de contours quelconques, on calcule

$$G = \sqrt{G_h^2 + G_v^2}.$$



## Détection de contour

Filtre diagonal de Roberts

$$I = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$I = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$