

Outils Mathématiques pour l'informatique

Jean-Luc Baril

Université de Bourgogne
Labo. Le2i, UMR-CNRS 5158
<http://www.u-bourgogne.fr/jl.baril>

September 24, 2007



Planning

Semaine 1: C1, C2

Semaine 2: C3, TD1

Semaine 3: TD2, TP1

Semaine 4: C4, TP2

Semaine 5: C5, TD1

Semaine 6: TD2, TP1

Semaine 7: TP2



Plan du cours

1. Introduction - Définitions
2. Notions de filtres - calcul matriciel
3. Etude d'un signal continu et discret - Théorie de Fourier
4. Application au traitement de l'image
6. Algorithme transformée de Fourier rapide
7. Applications (tatouage d'images, compression, ...)



Introduction - Définitions

Objectifs

- * Acquérir les bases mathématiques pour le traitement de l'image
- * Quelques notions de traitements d'images
 - Acquisition (représentation d'une image, matrices...)
 - Notion de filtres (produit de matrices, convolution...)
 - Rehaussement d'image (recadrage d'une fonction dans un intervalle)
 - Restauration d'image (notion de voisinage, frontière,...)
 - Détection de contour (voisinage, frontière,...)
 - Atténuation de contour (.....)



Introduction - Définitions

Objectifs

- * Quelques notions de la théorie du signal
 - Décomposition d'une image en somme de signaux sinusoidaux(théorie de Fourier, transformée de Fourier continue et discrète)
 - Filtrage selon les fréquences d'un signal (transformée de Fourier, algorithme transformée de Fourier rapide, récursivité,...)



1. Introduction - Définitions

Traitement de l'image

* Méthodes pour la transformation d'images

- Amélioration de l'apparence
- Extraction d'informations
- Compression pour la transmission

* Exemples

- Reconnaissance automatique des adresses
- Contrôle automatique de vision dans une chaîne de fabrication
- Reconnaissance de formes (domaine militaire)
- Compression d'image (internet et télé numérique)



Définition d'une image:

- représentation d'une scène par la peinture, la sculpture, le dessin, photographie, film...
- Ensemble structuré d'informations qui après affichage sur un support (écran, toile, papier, ...) ont une signification pour l'oeil humain.

- Si x et y sont les coordonnées spatiales d'un point de l'image, $I(x, y)$ est une fonction de l'intensité lumineuse et de la couleur.

- $I(x, y)$ signal analogique continue

Inexploitable par la machine \implies numérisation



Définition : Image numérique

Image = Matrice de nombres entiers

Dans un Pixel (2D) (picture element)

- * Scalaires = 1 valeur (niveaux de gris)
- * Vecteurs = plusieurs valeurs (couleurs) (3 RGB) (Red - Green - Blue)

Lors de l'acquisition, le signal analogique continu est numérisé (discrétisé)

Perte d'informations lors de la discrétisation

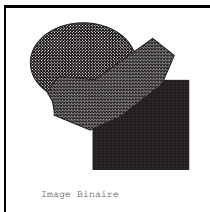
- * L'échantillonnage (sélection des points)
- * La quantification (sélection de couleurs)



1. Introduction - Définitions

1.2.1 Images binaires

Définition : Image = Tableau de 0 et de 1 (0 noir, blanc 1)



sous scilab

```
M= [0 1 0; 1 0 1; 0 1 0] imshow(M)
```



Définition : image en niveaux de gris

Image = Tableau d'entiers compris entre 0 et L_{max}

En général, L_{max} est de la forme de $2^n - 1$.

Qualité d'une image

+ Qualité visuelle : Nombre de niveaux

+ Résolution : Capacité à distinguer deux détails proches.

Fonction du nombre de niveaux et du nombre de Pixels





Images en niveaux de gris

Place mémoire

Si $n = 512$, et s'il y a $256 = 2^8$ niveaux de gris alors:

Si on code les niveaux de gris sur 8 bits (1 octet) alors la place mémoire utilisée est :

$512 \times 512 \times 1 = 0.25$ Megaoctets

sous scilab

Sous Scilab:

```
I=ones(4,1)*[(0:6)]
```

```
imshow(I)
```

```
I=imread('image.jpg')
```

```
imshow(I)
```



Définition : Images en couleur

combinaison de trois images (RGB) (Red, green , blue)

Place mémoire image RGB = 3 fois celle pour le niveau de gris.
Par exemple, avec 8 bits pour une couleur, on peut coder $(2^8)^3$
niveaux de couleurs.



Formats d'images

* **Image Bitmap (.bmp):** Matrice 2D de points (pixel - picture element)

- Adapté à l'affichage sur écran
- Adapté au traitement de l'image

* **Image GIF (.gif):** Fichier fortement compressés (méthode LWZ)

- Conservation d'une qualité très correcte.
- Le nombre maximal de couleurs contenu dans une image au format GIF est de 256.

* **Image TIFF (.tif):** Fichier fortement compressés (méthode Run Length Encoding) - AAAAAHHHHTTTTTTTT 5A4H7T

* **Image JPEG (.jpg):** Fichier fortement compressés, mauvaise conservation de la qualité de l'image (Huffman) Exemple de la phrase COMMENT CA MARCHE



Echantillonnage

Résolution spatiale

La résolution spatiale ou géométrique est la distance la plus petite permettant de discriminer deux objets voisins.
Par exemple, pour une image à 20 mètres de résolution, chaque pixel représente une superficie correspondant 20 x 20 mètres.

Résolution relative

Nombre de prélèvements que fait l'appareil sur une longueur de 1 pouce (DPI, Dots per inch - 1 pouce=2,54cm)

+ Imprimante 300 DPI, Scanner 1200 DPI...

- Résolution absolue associée au capteur

+ Moniteur 1600x1200 pixels





1.4 Echantillonnage

* **Discrétisation du repère spatial**

- Passage à un nombre de données (Pixels) finis
- Adapté au traitement de l'image
- Résolution relative associée à la résolution spatiale



1.5 Quantification

* **Discrétisation du repère colorimétrique**

- Passage d'un signal analogique (infinité de couleurs) à un signal discret à 2^N niveaux de couleurs

+ Pixels codés sur N bits

+ 8 bits \Rightarrow 256 niveaux

+ 16 bits \Rightarrow 65536 niveaux

+ 24 bits \Rightarrow 16M de niveaux



1.5bis Vocabulaire

- * **Bruit** Phénomène de brusque variation de l'intensité d'un pixel / pixels voisin
- * **Contours** Frontière entre deux objets ou zones de l'images
- * **Luminance** Degré de luminosité des points de l'image ~
brillance
- * **Contraste** Opposition marquée entre une région sombre L1
et claire L2

$$C = \frac{L1 - L2}{L1 + L2}$$



Opérations géométriques sur les images

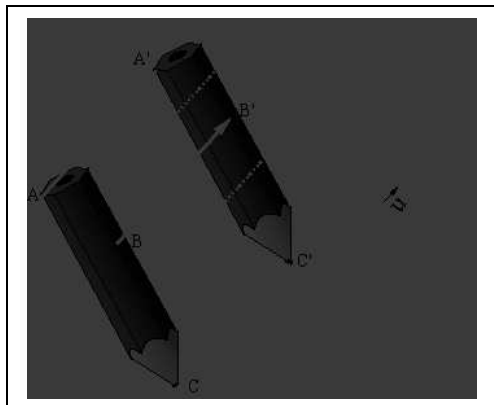
+ Translation de vecteur (X_0, Y_0)

$$(X, Y) \implies (X + X_0, Y + Y_0)$$

+ Passage en coordonnées universelles (X, Y, Z) On rajoute une coordonnée fictive Z

Expression matricielle

$$\begin{array}{|c|} \hline X' \\ \hline Y' \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 0 & X_0 \\ \hline 0 & 1 & Y_0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline X \\ \hline Y \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}$$





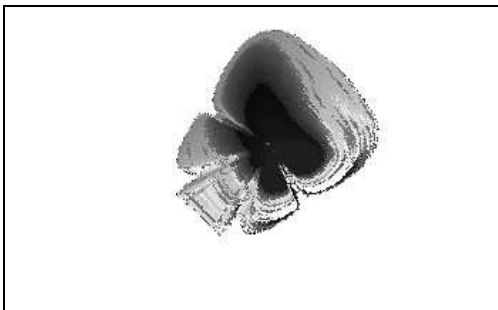
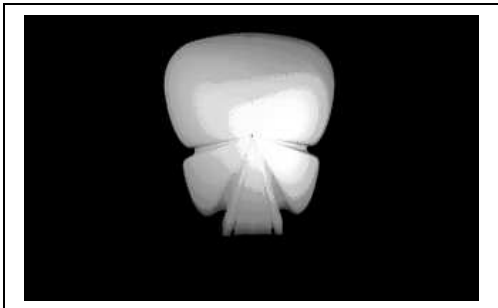
Opérations géométriques sur les images

+ Mise à l'échelle

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline S_x & 0 & 0 \\ \hline 0 & S_y & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

+ Rotation d'angle θ

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \hline -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

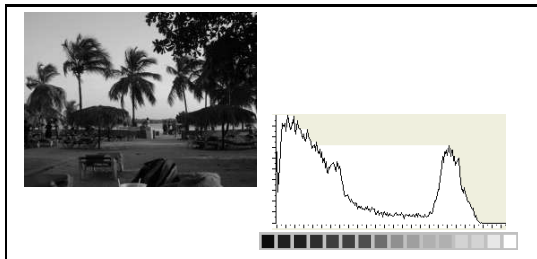




Histogramme d'une image

- Fonctions représentant la fréquence d'apparition d'un niveau de gris

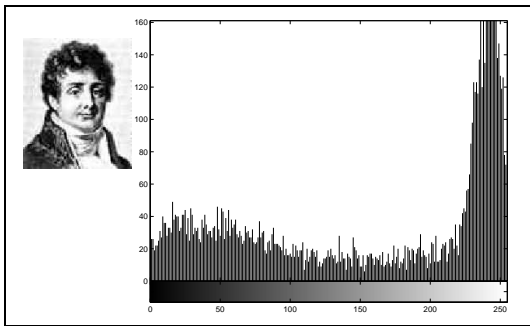
$$H(\text{Niv. gris}) = \text{card}\{\text{pixels de ce niv. de gris}\}$$





Histogramme d'une image

Sous Scilab utiliser `histplot(I);`





Rehaussement d'image

- Accentuer certaines caractéristiques pour analyser ou visualiser (contraste, contours, ..)
- Transformation de chaque niveau de gris en un autre
 - + Exemples : éclaircissement, assombrissement
 - + Exemples : égalisation histogramme (augmente les nuances)
 - + Exemples : étirement d'histogramme
 - + Transformation de voisinage (Théorie de Fourier)



Etirement

- Utilisation au mieux de l'échelle des niveaux

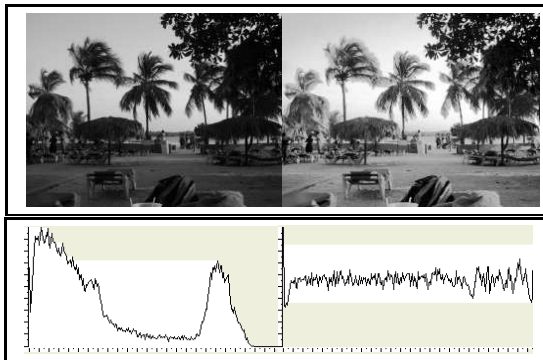
$$p'(x, y) = \alpha + \beta \cdot p(x, y)$$

On modifie chaque pixel en lui appliquant une transformation linéaire

+ **Exemples**: égalisation, tassement, rehaussement de l'histogramme

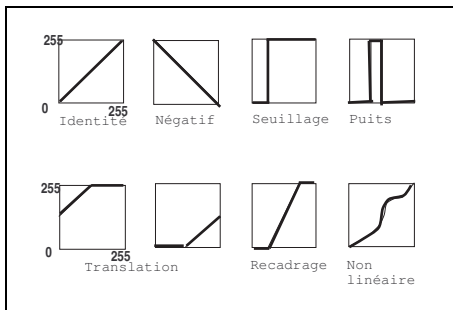


Exemple





Exemples



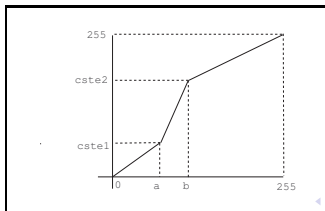


Etirement du contraste

On pose $v = f(u)$ le niveau de gris de l'image résultat qui remplace le niveau de gris de l'image initiale.

Augmentation du contraste

$$v = \begin{cases} \alpha u & 0 \leq u \leq a \\ \beta(u - a) + \text{cste}_1 & a \leq u \leq b \\ \gamma(u - b) + \text{cste}_2 & b \leq u \leq 255 \end{cases}$$





Découpage de l'image

On reprend la fonction précédente avec $\alpha = \gamma = 0$.

$$v = \begin{cases} 0 & 0 \leq u \leq a \\ \beta(u - a) & a \leq u \leq b \\ cste_2 & b \leq u \leq 255 \end{cases}$$

Compression de la dynamique des gris

$$v = cste \cdot \text{Log}(1 + u)$$

Eclaircit le foncé



Linéarisation de l'histogramme

$$v = (g_{max} - g_{min})P(u) + g_{min}$$

$P(u)$ histogramme cumulé

Augmentation de la clarté de l'image par augmentation du contraste

Histogramme exponentiel

$$v = g_{min} + \ln(1 - P(u))/cste$$

Histogramme logarithmique

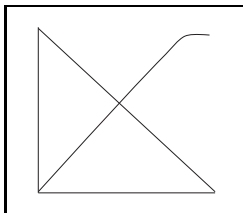
$$v = g_{min}(g_{max}/g_{min})^{P(u)}$$



Linéarisation de l'histogramme

Exemple: $h(u) = 1 - u$ pour $u \in [0..1]$ et
La linéarisation donne

$$P(u) = u - \frac{1}{2}u^2$$





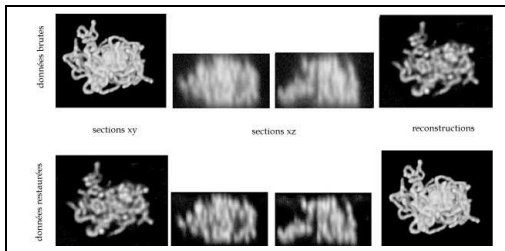
1.8 Restauration d'images

- Minimisation des dégradations

- Suppression de flou

Atténuation des bruits

Correction des distorsions géométriques





1.9 Analyses d'images

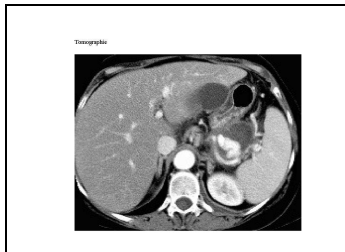
- Faire des mesures quantitatives
 - + Lecture étiquettes
 - + Mesure de la taille de cellules sanguines
 - + Utilisation robotique, armée
 - + Utilisation de la segmentation pour l'isolement

d'un objet



1.10 Reconstruction d'images à partir de projections

- Tomographie
- Images radar
 - Images médicales, scanner...





1.11 Compression de données

- Stockage d'images, LWZ, Shannon,
 - Image vidéo
 - Réduction à stocker sans perte significative d'information
- Exemples : Transmission TV, visioconférences, ...



Notions de filtres

Filtrage - Définition

Le filtrage est une opération qui consiste à appliquer une transformation à tout ou partie d'une image numérique.

Il y a deux sortes de filtres:

- + Filtrage linéaire : L'opération est linéaire
- + Filtrage non linéaire : L'opération n'est pas linéaire



Exemple du filtre médian

On donne au pixel de coordonnée (x, y) la valeur médiane des voisins.

Exemple:

	4	10	11
I=	5	6	8
	10	7	3

La valeur médiane est 7

Remarque: transformation non linéaire, difficulté de mise en place

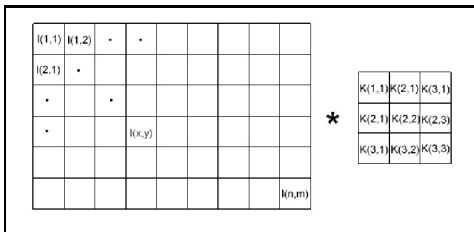
Effet: Lissage en préservant les contours



Filtre de convolution

Définition

Un produit de convolution est un opérateur mathématiques entre deux matrices.



$$I'(x,y) = \sum_{k,l \in \{1,2,3\}} I(x+k-2, y+l-2)K(k,l)$$

sous Scilab : `I'=imconv(I,K):`



2.2 Filtre passe haut

Ils permettent notamment d'accentuer les détails et le contraste, c'est la raison pour laquelle le terme de "filtre d'accentuation" est parfois utilisé.

0	-1	0
-1	5	-1
0	-1	0



2.2 Filtre passe haut - Exemple

Image 5x5 d'une étoile dans le noir



2.2 Filtre passe haut





2.3 Filtre passe bas

A contrario, il adoucit les détails et réduit les bruits granuleux.

1	1	1
1	4	1
1	1	1

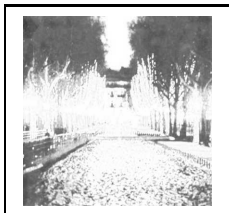


2.3 Filtre passe bas - Exemple

Image 5x5 d'un bruit dans le noir



2.3 Filtre passe bas





2.3 Filtre moyenne

Cas particulier du passe bas, il remplace chaque pixels par la moyenne des pixels adjacents et du pixel central.

$$\frac{1}{9} * \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$



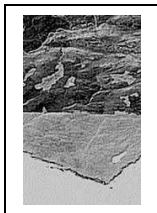
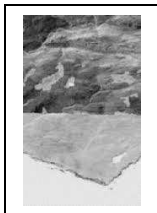
2.3 Filtre directionnel

Rehausse les caractéristiques suivant une direction donnée

-1	0	-1
0	5	0
-1	0	-1



2.3 Filtre directionnel





2.3 Filtre Laplacien

Met en valeur les détails qui ont une variation rapide de luminosité. Détecteur de contour, reconnaissance de formes (armée, satellites,...)

Filtre passe-haut très efficace

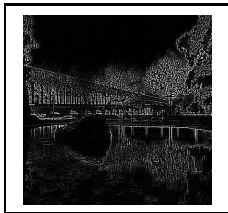
0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0

-1	-1	-1
-1	8	-1
-1	-1	-1

1	-2	1
-2	4	-2
1	-2	1



2.3 Filtre Laplacien





Détection de contour

Filtres horizontal et vertical de Prewitt

$$I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$I = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Detecteurs de contours quelconques, on calcule

$$G = \sqrt{G_h^2 + G_v^2}.$$



Détection de contour

Filtre diagonal de Roberts

$$I = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 \\ \hline \end{array}$$

$$I = \begin{array}{|c|c|} \hline 0 & 1 \\ \hline -1 & 0 \\ \hline \end{array}$$