Exo 1 ②

(d) Reflexivité $\forall x, \exists p=q=1, x = p x^q$ donc $x \mathcal{R} x \Rightarrow$ Reflexivité

Symetrie : non car $1 \mathcal{R} 2$ mais 2 n'est pas en relation avec 1
($2 \not\mathcal{R} 1$)

Antisymetrie Supposons $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} x \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists p>0, q>0, y = p x^q \\ \exists r>0, s>0, x = r y^s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq x \\ x \geq y \end{cases} \Rightarrow x = y$$
$\Rightarrow$ Antisymetrie

Transitivité : Supposons $\begin{cases} x \mathcal{R} y \\ y \mathcal{R} z \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists p>0, q>0, y = p x^q \\ \exists r>0, s>0, z = r y^s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \exists p>0\, q>0 \\ \exists r>0\, s>0 \end{matrix} \; z = r (p x^q)^s$$

$$\Rightarrow \exists p, q, r, s > 0 \quad z = r p^s x^{qs}$$

$$\Rightarrow \exists p' = r p^s, \exists q' = qs \quad z = p' x^{q'}$$

$$\Rightarrow x \mathcal{R} z \Rightarrow \text{Transitivité}$$

Exercice 2 : (a) On a déjà montré que $\mathcal{R}$ était une relation d'equivalance. Trouvons les classes d'equivalence :

$\bar{0} = \{x, 0 + x \text{ est pair}\} = \{x \text{ pair}\} = 2\mathbb{Z}$

$\bar{1} = \{x, 1 + x \text{ est pair}\} = \{x \text{ impair}\} = 2\mathbb{Z} + 1$

L'ensemble Quotient est donc :

$\mathbb{Z}/\mathcal{R} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ qui est en bijection avec $\{0, 1\}$