Relations binaires et d'équivalences - TD 1 - 2018-2019

Université de Bourgogne - Licence 2 - Dépt IEM

Exercice 1 : Relations binaires Les relations suivantes sont-elles réflexives, symétriques, antisymétriques ou transitives?

a) $A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $|x| = |y|$

b) Même chose avec $A = \mathbb{C}$

c) $A = \mathbb{R}$ et $x\mathcal{R}y$ si $sin^2 x + cos^2 y = 1$

d) $A = \mathbb{N}$ et $x\mathcal{R}y$ s'il existe $p > 0$ et $q > 0$, $p, q \in \mathbb{N}$, tel que $y = px^q$

Exercice 2 : Relations d'équivalences

a) Sur $\mathbb{Z}$ on écrit " $x\mathcal{R}y$ quand $x + y$ est pair". Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Décrire les classes d'équivalences.

b) Sur $\mathbb{R}$ on définit la relation "$x\mathcal{R}y$ quand $cos(2x) = cos(2y)$". Démontrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Quelles sont ses classes d'équivalence?

c) Même questions avec la relation sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow a + d = c + b$$

d) Même questions avec la relation de $E = \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$(a, b)\mathcal{R}(c, d) \Longleftrightarrow ad = cb$$

Exercice 3 : Etudier la relation $\mathcal{R}$ sur l'ensemble E des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par:

$$f\mathcal{R}g \Longleftrightarrow \text{ il existe } A > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x| > A \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

Exercice 4 : La relation suivante est-elle une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$?

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

Préciser le nombre d'éléments de la classe de x.

Exercice 3 : Relations d'ordres

Sur $\mathbb{N}^2$, on définit une relation $\mathcal{R}$ de la façon suivante: $(a, b)\mathcal{R}(\alpha, \beta)$ si

$$\begin{array}{ll} & a = \alpha \text{ et } b = \beta \\ \text{ou si} & a < \alpha \\ \text{ou si} & a = \alpha \text{ et } b < \beta \end{array}$$

a) Démontrer qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre. Quels sont les éléments maximaux et minimaux?

b) Démontrer qu'il s'agit d'une relation de bon ordre, i.e. toute partie non vide possède un plus petit élément.

c) Caractériser les éléments qui ne sont pas successeurs d'un autre élément.

Exercice 4 : L'ordre lexicographique

On considère l'ensemble M de tous les mots possibles formés des 26 lettres de l'alphabet.

a) Quels sont les éléments maximaux et minimaux (s'ils existent)

b) Soit B l'ensemble de mots commençant par la lettre b. B possède-t-il une borne sup et inf dans M?

c) Quel est élément couvre le mot "aaaaa"? le mot "ababab"?

Exercice 5 : Décomposition d'une application:

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $x \longrightarrow sin(x)$. Décomposer cette application en un produit d'une surjection, une bijection et une injection.

Exercice 6 : Diagramme de Hasse Dessiner le Diagramme de Hasse des D_{48} muni de la relation divise.