TP 8 - Résolution de problèmes linéaires

Les matrices

Pour écrire des matrices sur Maple, on peut utiliser la commande *array*. Par exemple

```
> v := array(1..8) :for i to 8 do v[i] := i^2 od: print(v);
> A := array(1..2, 1..2) : A[1, 1] := cos(x) : A[1, 2] := sin(x) : A[2, 1] := −A[1, 2] : A[2, 2] := A[1, 1] : print(A);
```

Un *array* est un objet structuré sur lequel on peut faire opérer par exemple *map*.

```
> map(diff, A, x);
```

Mais dans Maple, il existe une bibliothèque spécialisée: *LinearAlgebra* qui intègre un large éventail de commandes et fonctions pour l'exécution de calculs d'algèbre linéaire. Pour charger cette bibliothèque on tape: `> with(LinearAlgebra)` . Pour obtenir une matrice grâce à *LinearAlgebra*, on utilise la commande *Matrix* sous la forme suivante:

```
> A := Matrix(3, 3, [5, −1, 0, 0, 1, 9, 4, 6, 3]);
> B := Matrix(3, 3, [[9, 3, −6], [3, 2, 0], [9, 8, 7]]);
```

Exercice Calculer alors $AB - BA$ et $A^5 + B^5$.
La matrice identité de taille n est donnée par *IdentityMatrix*(n). Vérifier que c'est bien la matrice identité.
On pose

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 7 \\ -7 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calculer $MB, CM, BC, CB, M + BC$.

Le déterminant d'une matrice carrée M est noté $\det(M)$, et se calcule avec la fonction *Determinant*. On rappelle qu'une matrice carrée A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B telle que $AB = BA = Id$. Un critère pour identifier si une matrice est inversible est de calculer son déterminant : A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Exercice Calculer la matrice inverse de M (avec la fonction *MatrixInverse*) ainsi que son déterminant. Calculer le déterminant et si possible l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 7 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

La matrice de Vandermonde $V(a)$ associé à un vecteur $a = (a_1, \dots, a_n)$ est définie par

$$V(a) = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Elle se calcule avec la commande *VandermondeMatrix*$([a_1, \dots, a_n])$.

Exercice Calculer le déterminant de Vandermonde associé au vecteur (t, u, v, w), puis le factoriser.

Les systèmes d'équations linéaires

Pour résoudre un système d'équations linéaires, on peut utiliser la commande *LinearSolve*. Pour rentrer les équations correspondantes au système $AX = b$, on introduit d'abord A et b puis on résout le système par:

> $A := Matrix(3, 4, [0, 2, 1, -2, 3, 5, -5, 1, 2, 4, -2, 2]); b := Vector([-2, 1, 2]); LinearSolve(A, b);$

On peut également entrer directement le système en faisant

> $eqns := \{x + y + 2 \cdot z = 9, 3 \cdot x - 2 \cdot y = 6, 4 \cdot x + 7 \cdot y = 0\};$

On retrouve la matrice et le vecteur associés à ce système en faisant

> $A, b := GenerateMatrix(eqns, [x, y, z]);$

Réciproquement, on retrouve les équations en faisant

> $GenerateEquations(A, [x, y, z], b)$

Exercice Pour chacun des systèmes suivants, trouver les matrices associées puis les résoudre.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x_1 & - & 4x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & - & 11x_5 & = & 28 \\ -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & + & 5x_5 & = & -1 \\ & & & - & 3x_3 & + & x_4 & + & 6x_5 & = & -10 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & + & 10x_3 & - & 8x_4 & - & 8x_5 & = & 61. \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 3z & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3. \end{array}\right.$$

La méthode du pivot de Gauss est une méthode cruciale en algèbre linéaire. Elle consiste à réduire la matrice du système en une forme échelonnée via des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes. Maple permet d'appliquer cette méthode via la commande *GaussianElimination*. Si on veut une forme échelonnée réduite, c'est à dire qui ne comporte que des 1 sur la diagonale, on utilise *ReducedRowEchelonForm*. Réduire une matrice déjà vue en utilisant *GaussianElimination* et comparer le résultat obtenu avec la réduction à la main.

Exercice Résoudre les systèmes suivants et trouver les formes échelonnées.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ 2x & - & y & + & 7z & = & 8 \\ -x & + & y & - & 5z & = & -5 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & - & z & = & 1 \\ x & & & + & z & = & 2 \\ & & y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & z & = & 4 \\ 4x & - & 2y & + & 3z & = & 2 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & & & + & x_3 & + & x_4 & - & 2x_5 & = & 1 \\ 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 3x_1 & - & x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 1. \end{array}\right.$$

Une application à l'interpolation

Soit le polynôme $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tel que $P(1) = 2$, $P(2) = 3$, $P(3) = -1$ et $P(4) = 1$. Construire le système dont a, b, c, d sont les inconnues. Trouver alors les solutions de ce système et en déduire une méthode d'interpolation par un polynôme de la fonction $h(x) = \frac{1}{1+x^2}$ sur l'intervalle $[-5, 5]$.