Exc / Relations d'ordre

a) Sur $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ $(a,b) \mathcal{R} (\alpha, \beta) \Leftrightarrow \begin{cases} a = \alpha \text{ et } b = \beta \\ \text{ou} \\ a < \alpha \\ \text{ou} \\ a = \alpha \text{ et } b < \beta \end{cases}$

c'est équivalent à : $(a,b) \mathcal{R} (\alpha, \beta) \Longleftrightarrow \begin{cases} a < \alpha \\ \text{ou} \\ a = \alpha \text{ et } b \leq \beta . \end{cases}$

Réflexivité on a $a = a$ et $b \leq b$ donc $(a,b) \mathcal{R} (a,b)$

Antisymétrie : Supposons $\begin{cases} (\alpha,b) \mathcal{R} (\alpha, \beta) \\ (\alpha, \beta) \mathcal{R} (a,b) \end{cases}$ alors

$\begin{cases} \begin{cases} a < \alpha & ① \\ \text{ou} \\ a = \alpha \text{ et } b \leq \beta & ② \end{cases} \\ \text{et} \\ \begin{cases} \alpha < a & ③ \\ \text{ou} \\ \alpha = a \text{ et } \beta \leq b & ④ \end{cases} \end{cases}$

① et ③ est impossible
① et ④ est impossible
② et ③
② et ④ $\Rightarrow a = \alpha$ et $b = \beta$.

Donc on a $(a,b) = (\alpha, \beta)$ donc antisymétrie

Transitivité

$(a,b) \mathcal{R} (\alpha, \beta)$ et $(\alpha, \beta) \mathcal{R} (u,v)$ $\Longrightarrow$

$\begin{cases} a < \alpha & ① \\ \text{ou} \\ a = \alpha \text{ et } b \leq \beta & ② \end{cases}$ et $\begin{cases} \alpha < u & ③ \\ \text{ou} \\ \alpha = u \text{ et } \beta \leq v & ④ \end{cases}$ $\Longrightarrow$

Si ① et ③ alors $a < \alpha < u$ $\Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (u,v)$

Si ① et ④ alors $a < \alpha = u$ $\Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (u,v)$

Si ② et ③ alors $a = \alpha < u$ $\Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (u,v)$

Si ② et ④ alors $a = \alpha = u$ et $b \leq \beta \leq v$ $\Rightarrow (a,b) \mathcal{R} (u,v)$

Donc transitive !