

TD 7-8

1 Soit la fonction C définie par :

```

void fonc (int n, int e, int *t)
{ if (n==-1)
  return 0;
  else if (t[n]==e)
    return 1;
  else return fonc (n-1, e, *t)
}

```

Donner, en français, la définition de `fonc`. Quelle est la complexité (le nombre de calculs élémentaires, d'appels récursifs ...) en moyenne et dans le pire des cas.

2 Il s'agit de calculer x^n pour un entier n positif. Une méthode est la suivante :

$$expo(x, n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ (expo(x, n/2))^2 & \text{si } n \text{ est paire,} \\ x \times (expo(x, \frac{n-1}{2}))^2 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Avec cette méthode a^{25} est calculé comme $a \times \left(\left((a \times a^2)^2 \right)^2 \right)^2$

1. Écrire l'algorithme qui effectue ce calcul. Est-t-il plus efficace que l'algorithme *naïf*?
2. Donner une version itérative de cet algorithme, en supposant que n est stocké, en représentation binaire, dans un tableau (binaire),
3. Donner une version itérative de cet algorithme si n est en représentation décimale (`int` en C),
4. Quelle est la *complexité* si $n = 1023$? Quelle est la *complexité* pour un n quelconque. Comparer ce résultat avec l'algorithme *naïf*.

3 Soit $\mathbf{B} = (\{0, 1\}, \cdot, +, -)$ l'algèbre de Boole minimale et $\mathcal{F}_n = \{f : \mathbf{B}^n \rightarrow \mathbf{B}\}$ l'ensemble de fonctions n -aires sur \mathbf{B}^n avec des valeurs en \mathbf{B} .

1. Trouver $card(\mathbf{B}^n)$ et $card(\mathcal{F}_n)$,
2. Lister exhaustivement \mathcal{F}_2 .

4 Trouver une forme close pour :

$$\begin{array}{l}
 1 \\
 u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{3}{2}u_{n-1} - \frac{1}{2}u_{n-2} & \text{si } n > 1. \end{cases} \\
 3 \\
 u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \text{ ou } n = 2, \\ 11u_{n-2} - 6u_{n-3} & \text{si } n > 2. \end{cases}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 2 \\
 u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n = 1 \\ 4u_{n-1} - 4u_{n-2} & \text{si } n > 1. \end{cases}
 \end{array}
 \right.$$

5 Soit la fonction booléenne donnée par l'arbre ci-dessous.

1. Trouver une forme polynomiale (combinaison de ses arguments par les opérations $+$, \cdot et $-$) pour cette fonction,

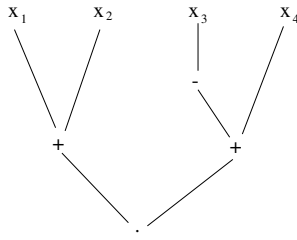


FIG. 1:

2. Donner le tableau de valeurs pour cette fonction.

6 Soit $B = (E, \cdot, +, -, 0, 1)$ une algèbre de Boole (pas nécessairement minimale). On définit une nouvelle opération binaire, notée \oplus et appelée « ou exclusif », par

$$x \oplus y = x\bar{y} + \bar{x}y$$

Cette opération est la différence symétrique dans le cas de l'algèbre de Boole des parties d'un ensemble. Montrer que :

1. \oplus est associative et commutative,
2. $x \oplus x = 0$
3. $x \oplus 0 = x$
4. $x \oplus 1 = \bar{x}$
5. $(x \oplus y)z = xz \oplus yz$
6. $x + y = x \oplus y \oplus xy$