TD 2

1 Théorie des dominos

Soit T_n l'ensemble de tous les pavages possibles d'un rectangle de taille $2 \times n$ avec des dominos 2×1.
Exemple

$$T_1 = \square$$

$$T_2 = \square\square,\ \boxminus$$

$$T_3 = \square\square\square,\ \square\boxminus,\ \boxminus\square$$

$$T_4 = \square\square\square\square,\ \square\square\boxminus,\ \boxminus\square\square,\ \square\boxminus\square,\ \boxminus\boxminus$$

et en général,

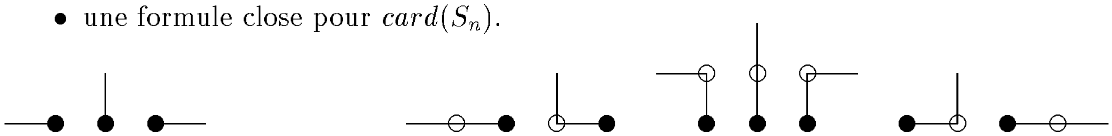
$$T_n = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad n = 0 \\ \square & \text{si} \quad n = 1 \\ \square T_{n-1} \cup \boxminus T_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

- Calculer $card(T_n)$;
- Trouver un *codage* (représentation linéaire) pour T_n.

2 Chemins

Soit S_n l'ensemble de chemins auto-évitants de longueur n qui consistent en trois types de pas: (1,0), (-1,0), (0,1). Trouver :

- un *codage* (représentation linéaire) pour S_n,
- une relation de récurrence pour $card(S_n)$,
- une formule close pour $card(S_n)$.



S_1 S_2

3 Combinaisons

Soit $C_{n,m} \subset \{0,1\}^n$ l'ensemble des suites binaires de longueur n et de poids m :

$$C_{n,m} = \{b_1 b_2 \dots b_n \mid \text{il existe exactement } m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

1. Écrire un algorithme pour générer $C_{n,m}$ utilisant le principe du compteur;
2. $C_{n,m}$ est défini récursivement :

$$C_{n,m} = \begin{cases} 00\dots0 & \text{si} \quad m = 0 \\ 11\dots1 & \text{si} \quad n = m \\ 0C_{n-1,m} \cup 1C_{n-1,m-1} & \text{si} \quad 1 < m < n. \end{cases} \tag{2}$$

   Écrire un algorithme récursif en utilisant cette relation.