Objets Combinatoires élementaires

- Permutations
  - Arrangements
  - Permutations pour un multi-ensemble
- mots
- sous-ensemble à k éléments (Problème du choix)
- Compositions

Permutations

Supposons que nous avons n personnes qui arrivent dans un cabinet dentaire au même moment. Le dentiste ne peut que les prendre un par un, alors il doit décider l'ordre dans lequel il doit les faire passer. Combien y a t il d'ordres possibles?

Soit $A = \{a_1, a_2 \ldots a_n\}$ un ensemble contenant n objets. Combien existe t il de mots différents de la forme :

$$x_1, x_2 \ldots x_n,\ x_i \neq x_j, x_i \in A$$

Définition Les arrangements de différents objets en ordre linéaire utilisant chaque objet exactement une fois est appelé une *permutation* de ces objets. Le nombre

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

de toutes les permutations de n objects est appelé $n\ factoriel$, et est noté $n!$.

Théorème Le nombre de toutes les permutations d'un ensemble à n éléments est $n!$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Exemple Combien de manières différentes peut on construire des drapeaux avec les 3 couleurs rouge, blanc et vert?

Arrangements

Définition Le choix de k objets différents parmis n objets en utilisant chaque objet au plus une fois est appelé *arrangement* de ces objets.

Théorème Le nombre d'arrangement de k élements parmi n est

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} = (n)_k$$

Le nombre

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

de toutes les permutations de n objets est appelé n $factoriel$, et est noté $n!$.

Exemple Un président doit choisir cinq politiciens parmi 20 candidats pour occuper cinq différents cabinets ministériels.

Combien de choix possibles a t il?

Permutations pour un multi-ensemble

Un multi-ensemble est un ensemble sauf que la répétition des éléments est permise.

Les arrangements de différent objets en ordre linéaire utilisant exactement n_i fois l' objet i avec $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$ est appelé *permutation* d'un multi-ensemble.

Notons que si $n_i = 1$ pour tout i alors on a une permutation ordinaire sans élément répété.

Théorème Avec les notations ci-dessus, le nombre de permutations d'un multi-ensemble (ou le nombre de façons de ranger linéairement ces objets) est

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}$$

Exemple Un jardinier a 5 fleurs rouges, 3 jaunes et 2 blanches pour planter en une rangée. Combien y a t il de motifs possibles?

Mots

Maintenant nous étudions les problèmes dans lesquels nous n'arrangerons pas simplement les objets, en connaissant combien de fois on peut utiliser chaque symbole, mais mais plutot en construisant des mots à partir d'un ensemble fini de symboles, ce que nous appelons un *alphabet* fini.

Nous n'avons pas besoin que les symboles apparaissent un nombre de fois spécifique.

Théorème Le nombre de mots de longueur k sur l'alphabet à n éléments est n^k.

Exemple Le nombre de sous-ensembles d'un ensemble à n éléments est 2^n

Preuve On construit une bijection de l'ensemble de tous les sous-ensembles d'un ensemble à n éléments vers les mots de longueur n sur l'alphabet binaire $\{0, 1\}$. Comme ce dernier ensemble a 2^n éléments, on obtient le résultat.

La bijection est construite de la façon suivante:

Soit B un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ et soit $f(B)$ le mot ayant un 1 en i-ième position si et seulement si $i \in B$ and 0 sinon.

Exemple Une ville a construit récemment 10 rond points. Certains d'entre eux auront un éclairage, et d'autres auront un éclairage avec une station essence. Combien y a t il de possibilités?

Proof Il est facile de construire une bijection de l'ensemble de toutes distributions de lumière et de station essences sur les mots de longueur 10 sur l'alphabet $\{0, 1, 2\}$.

Pour chaque distribution de ces objets, on définit le mot sur $\{0, 1, 2\}$ comme suit:

- si l'intersection i a une station essence et un éclairage, alors on met le chiffre 2 sur la $i$ème lettre du mot
- si seulement il y a un éclairage on met 1 sur la $i$ème lettre du mot,
- dans les autres cas on met 0

Sous-ensemble à (problème du choix)

Exemple A la lotterie nationale de Hongrie, cinq nombres sont sélectionnés aléatoirement dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 90\}$. Pour gagner le gros lot, on doit deviner tous les 5 nombres correctement. Combien de tickets a t on besoin de jouer pour etre sur d'avoir le gros lot.

Cette question est un exemple du dernier et plus important et interessant problème d'énumération élémentaire, le problème du choix. Dans ce genre de problème, nous avons à choisir des *sous-ensembles* dans un ensemble donné. Nous supposerons toujours que les sous-ensembles ont une taille donnée. La différence importante avec les problèmes précédents est que l'ordre des éléments du sous-ensemble n'a aucune importance; Par exemple $\{1, 43, 52, 8, 3\}$ et $\{3, 8, 52, 1, 43\}$ sont deux sous-ensembles identiques de $\{1, 2, \ldots, 90\}$.

Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \dots , n\}$ a une importance cruciale en combinatoire.

Définition Le nombre de sous-ensembles à k éléments dans $\{1, 2, \dots , n\}$ est noté $\binom{n}{k}$ et appelé *coefficient binomial*

Théorème Pour tout entier k positif ou nul $k \leq n$, on a

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n)_k}{k!}$$

Proposition Pour tout entier k positif ou nul $k \leq n$, on a

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

Exemple Un étudiant en médecine doit travailler dans un hopital pour 5 jours en janvier. Il ne doit pas travailler 2 jours consécutifs dans un hopital. De combien de manières peut il choisir les 5 jours?

Exemple Maintenant on suppose que nous jouons a la lotterie ou 5 nombres sont tirés parmis $\{1, 2, \ldots, 90\}$, mais les nombres tirés sont remis en jeu après etre sélectionnés. Pour gagner le jackpot, on doit jouer le même multi-ensemble de nombres que le tirage (l'ordre ici n'a pas d'importance). Combien de ticket dois je acheter pour etre sur d'avoir le jackpot?

Théorème le nombre de multi-ensembles à k éléments parmis $\{1, 2, \ldots, n\}$ est

$$\binom{n+k-1}{k}$$

Permuts	n objets distincts	$n!$
	k objets distincts parmis n objets	$(n)_k = \frac{n!}{(n-k)!}$
	a_i objets de type i $\sum_{i=1}^{k} a_i = n$	$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots n_k!}$
mots (words)	mots de longueur k sur un alphabet à n letters	n^k
Sous-ens.	sous-ens. à k éléments de $\{1, \ldots n\}$	$\binom{n}{k}$
	Multi-ens. de k éléments avec des éléments dans $\{1, \ldots n\}$	$\binom{n+k-1}{k}$

Autres objets combinatoires

Compositions

Supposons que nous avons à distribuer 30 balles identiques pour quatre enfants: Alice, Bob, Charlie and Denise. Comme les balles sont identiques, cela revient à savoir combien de balles devrais je donner à chaque enfant. Alors si nous voulons savoir le nombre de facons de distribuer ces balles, nous avons simplement à savoir le nombre de facons d'écrire 20 comme une somme de 4 entiers positifs ou nuls. Clairement, l'ordre des entiers importe, c'est à dire, $1 + 6 + 8 + 5$ ne correspond pas à la même distribution que $6 + 1 + 5 + 8$.

Définition Un tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ avec

- $a_i \geq 0$
- $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$

est appelé une composition de n. Si nous avons aussi $a_i > 0$ pour tout i, alors le tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ est appelé *composition faible* de n.

Théorème Le nombre de compositions de n en k parties est

$$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$$

Théorème Le nombre de compositions faible de n en k parties est

$$\binom{n-1}{k-1}$$

Corollary Le nombre de toutes les compositions faibles de n est 2^{n-1}

Preuve Une composition faible de n aura au moins une et au plus n parties. Alors le nombre total compositions faibles de n est

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}$$

Partitions d'un ensemble

Maintenant supposons que les *balles* sont différentes, mais les boites ne le sont pas. Alors on doit étiqueter les balles de 1 à n. En d'autres termes, on doit simplement dire que nous voulons *partitionner* l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k sous-ensembles non vide.

Définition Le nombre de partitions de $\{1, 2, \dots, n\}$ en k parties non vide est noté $S(n, k)$, et il est appelé le *nombre de Stirling de seconde espèce.*

Exemple L'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ a 7 partitions en deux parties non vide:

- $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$
- $\{1, 2, 4, \}$, $\{3\}$
- $\{1, 3, 4\}$, $\{2\}$
- $\{2, 3, 4, \}$, $\{1\}$
- $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$
- $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$
- $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$

Exemple

- Pour tout $n \geq 1$, on a $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.
- Pour tout $n \geq 2$, on a $S(n, n-1) = \binom{n}{2}$ puisqu une partition de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en $n-1$ parties doit etre faite de 1 doublon et de $n-2$ singletons.

Théorème Pour rout entier positif $k \leq n$, on a

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k)$$

Corollaire Le nombre de toutes les fonctions surjectives

$$f : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$$

est $k! \cdot S(n, k)$

Une autre facon de trouver notre énumeration de partitions est en énumerant *toutes* les partitions, sans restreindre le nombre de parties.

Définition Le nombre de *toutes* les partitions d'ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ en parties non vide est noté $B(n)$, et est appelé le $n$ème nombre de Bell.

Alors $B(n) = \sum_{i=1}^{n} S(n, i)$, le nombre de Bell satisfait aussi une jolie relation de récurrence.

Théorème Pour tout entier positif n on a

$$B(n+1) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B(i)$$

partition d'entier

Maintenant nous supposons que les balles et les boites sont indistinguables, alors quand on distribue les balles dans les boites, la seule chose qui importe est leurs nombres. EN d'autres termes, on est interessé de trouver le nombre de facons d'écrire un entier positif n comme une somme d'entiers positifs, ou l'ordre de sommation n'a pas d'importance. C'est à dire, $4 = 3 + 1$ ou $4 = 1 + 3$ seront comptés pour une seule sommation pour l'entier 4.

Comme l'ordre de sommation ne compte pas, on ne perd pas de generalité si on suppose que la sommation est en ordre décroissant (faible).

Définition Soit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_k \geq 1$ des entiers tels que $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$. Le tableau $a_1 a_2 \ldots a_k$ est appelé une *partition* de l'entier n. Le nombre de toutes les partitions de n est noté $p(n)$.Le nombre de partitions de n en exactement k parties est noté $p_k(n)$.

Exemple L'entier 5 a 7 partitions. En effet, il y a

- 5
- $4+1$
- $3+2$
- $3+1+1$
- $2+2+1$
- $2+1+1+1$
- $1+1+1+1+1$

Donc, $p(5) = 7$.

objets distincts boites distinctes	objets identiques boites distinctes
objets distincts boites identiques	objects identiques boites identiques

- – nombre fixé de boites
  – nombre quelconque de boites
- – pas de boite vide
  – boite vide autorisé

Enumeration formulae if no boxes are empty

Surjection	n objets distincts k boites distincts	$S(n,k) \cdot k!$
	n objets distincts nombre quelconque de boites distinctes	$\sum_{i=1}^{n} S(n,i) \cdot i!$
Compositions faibles	n objets identiques k boites distinctes	$\binom{n-1}{k-1}$
	n objets identiques nombre quelconque de boites distinctes	2^{n-1}
partitions d'ens.	n objets distincts k boites identiques	$S(n,k)$
	n identiques objets number quelconque de boites identiques	$B(n)$
partition d'entier	n identiques objets k identiques boites	$p_k(n)$
	n identiques objets nombre quelconque de boites identiques	$p(n)$

formule d'énumération pour les boites vides autorisées

Fonction	n distincts objets k distinctes boites	k^n
Compositions	n identiques objets k distinctes boites	$\binom{n+k-1}{k-1}$
partitions d'ensemble	n distincts objets k identiques boites	$\sum_{i=1}^{k} S(n,i)$
partitions d'entier	n identiques objets k identiques boites	$\sum_{i=1}^{k} p_i(n)$

objets combinatoires plus élaborés

- mots de Dyck
- mots de Schröder
- mots de Motzkin
- Colliers
- mots de Lyndon

Mots de Dyck

Définition L'ensemble $D(\ell)$ des mots de Dyck de longueur 2ℓ est l'ensemble des mots w écrits avec les lettres $\{a, b\}$ satisfaisant

- la propriété du préfix chaque prefix a au mois plus d'occurrences de a que de b
- $|w|_a = |w|_b$

Mots de Motzkin

Définition L'ensemble $M(n)$ des mots de Motzkin de longueur n est l'ensemble des mots w écrits avec des lettres de $X = \{a, b, 0\}$ satisfaisant

- La propriété du préfix chaque prefix a au mois plus d'occurrences de a que de b
- $|w|_a = |w|_b$

Necklaces - Colliers

Définition A k-aire necklace (ou collier) est une classe d'équivalence de mots of k-aire modulo rotation.

Exemple Il y a exactement 6 classes d'équivalences pour les mots binaires de longueur 4.

0000	0001	0011	0101	0111	1111
	0010	0110	1010	1011	
	0100	1100		1101	
	1000	1001		1110	

On prend le plus petit lexicographiquement pour le représentant de chaque classe

Mots de Lyndon

Définition Un mot de Lyndon est une apréRiodique necklace

0001

0011

0111

Quel est la cardinalité des necklaces et des mots de Lyndon?

La fonction $\phi(m)$, la fonction d'Euler, est le nombre de k dans l'intervalle $1 \leq k \leq m$ qui sont prmiers avec m.

Exemple

$$\phi(1) = |\{1\}| = 1$$

$$\phi(6) = |\{1, 5\}| = 2$$

Théorème

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n$$

Théorème Le nombre de k-aire necklaces de longueur n est

$$N_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi\left(\frac{n}{d}\right) \cdot k^d$$

La fonction $\mu(m)$ est la fonction de Möbius:

- 0 Si m est le produit de premiers non distincts,
- +1 si c est le produit d'un nombre pair de premiers distincts,
- -1 dans les autres cas

avec $\mu(1) = 1$

Exemple

$$\mu(18) = 0$$

$$\mu(6) = 1$$

$$\mu(7) = -1$$

Théorèm'

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \qquad \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Le nombre de mots de Lyndon k-aires de longueur n

$$L_k(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) \cdot k^d$$