Théorie des dominos

Soit T_n l'ensemble de tous les pavages possibles d'un rectangle de taille $2 \times n$ avec des dominos 2×1.

Exemple

$$T_1 = \Box$$

$$T_2 = \Box\Box,\ \boxminus$$

$$T_3 = \Box\Box\Box,\ \Box\boxminus,\ \boxminus\Box$$

$$T_4 = \Box\Box\Box\Box,\ \Box\Box\boxminus,\ \boxminus\Box\Box,\ \Box\boxminus\Box,\ \boxminus\boxminus$$

et en général,

$$T_n = \begin{cases} \emptyset & \text{si} \quad n = 0 \\ \Box & \text{si} \quad n = 1 \\ \Box T_{n-1} \cup \boxminus T_{n-2} & \text{si} \quad n > 1 \end{cases} \tag{1}$$

Calculer $card(T_n)$;

Séries génératrices

Soit $a_0, a_1, \ldots a_k, \ldots$ une suite. La série

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k$$

est appelée série génératrice de cette suite. Les coefficient a_k est également noté $[z^k]A(z)$.

	suite	série génératrice
1	$1, 1, 1, 1, \ldots, 1, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} z^n$
2	$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} nz^n$
3	$1, 2, 3, 4, \ldots, (n+1) \ldots$	$\sum_{n\geq 0}(n+1)z^n$
4	$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$
5	$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} c^n z^n$
6	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n} z^n$
7	$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, C_n^2, \ldots$	$\sum_{n\geq 2} C_n^2 z^n$

Opérations sur le séries génératrices I

$$A(z) = \sum_{k \geq 0} a_k z^k, B(z) = \sum_{k \geq 0} b_k z^k$$

- $A(z) + B(z)$ est la s. g. de la suite

$$a_0 + b_0,\ a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots$$

- $zA(z)$ est la s. g. de la suite

$$0, a_0, a_1, a_2, \ldots$$

- $A'(z)$ est la s. g. de la suite

$$a_1, 2a_2, 3a_3 \ldots$$

- $A(z)B(z)$ est la s. g. de la suite

$$a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \ldots$$

Opérations sur le séries génératrices II

1. Décalage vers la droite

$zA(z) = \sum_{n\geq 1} a_{n-1} z^n$

$0, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \ldots$

2. Décalage vers la gauche

$\frac{A(z)-a_0}{z} = \sum_{n\geq 0} a_{n+1} z^n$

$a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}, \ldots$

3. Multiplication d'indice (différentiation)

$A'(z) = \sum_{n\geq 0}(n+1)a_{n+1} z^n$

$a_1, 2a_2, 3a_3, 4a_4, \ldots, (n+1)a_{n+1}, \ldots$

4. division d'indice (intégration)

$\int_0^z A(t)dt = \sum_{n\geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} z^n$

$0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{3}, \frac{a_3}{4}, \frac{a_4}{5}, \ldots, \frac{a_{n-1}}{n}$

5. mise à l'echelle

$A(\lambda z) = \sum_{n \geq 0} \lambda^n a_n z^n$

$a_0, \lambda a_1, \lambda^2 a_2, \ldots, \lambda^n a_n, \ldots$

6. addition

$A(z) + B(z) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$

$a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n, \ldots$

7. différence

$(1 - z) A(z) = a_0 + \sum_{n \geq 1} (a_n - a_{n-1}) z^n$

$a_0, a_1 - a_0, \ldots, a_n - a_{n-1}, \ldots$

8. convolution

$A(z) B(z) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k} \right) z^n$

$a_0 b_0, a_1 b_0 + a_0 b_1, \ldots, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k b_{n-k}, \ldots$

9. somme partielle

$\frac{A(z)}{1-z} = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{0 \leq k \leq n} a_k \right) z^n$

$a_1, a_1 + a_2, \ldots, \sum_{0 \leq k \leq n} a_k, \ldots$

Calculer la série génératrice pour :

Calculer la série génératrice pour les suites :

1. (3)

$1, 2, 3, \ldots, (n+1), \ldots$

$a_n = n + 1$

$F(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$

2. (1)

$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$

$a_n = n$

$F(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$

3. (4)

$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$

$a_n = \frac{1}{n}$

$F(z) = \ln \frac{1}{(1-z)}$

4. (5)

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

$a_n = \frac{1}{2^n}$

$F(z) = \frac{1}{1-z/2}$

5. (2)

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^{n+1}}, \ldots$

$a_n = \frac{1}{2^{n+1}}$

$F(z) = \frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}$

6. (7)

$1, -\frac{1}{2}, +\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \ldots, \ldots$

$a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$F(z) = \frac{1}{1+z/2}$

7. (9)

$0, 1, 3, 6, \ldots, \frac{n(n+1)}{2}, \ldots$

$a_n = \frac{n(n+1)}{2}$

$F(z) = \frac{z}{(1-z)^3}$

8.

$1, -1, 1, \ldots$

$a_n = (-1)^n$

$F(z) = \frac{1}{1+z}$

Manœuvres de base

Les fonctions génératrices permettent de résoudre des relations de récurrences. Etant donnée une suite a_n qui satisfait une certaine récurrence nous cherchons une forme close pour a_n en fonction de n; il faut procéder en quatre étape :

1. Ecrire une relation qui exprime a_n en fonction d'autres éléments de la suite,

2. Multiplier les deux membres de l'équation par z^n et sommer sur tout n. Ceci donne, dans le membre gauche la somme $\sum_n a_n z^n$, donc la fonction génératrice $F(z)$. Le membre droit doit être réorganisé de façon à devenir une expression en fonction de $F(z)$,

3. Résoudre la nouvelle équation pour obtenir une forme close de $F(z)$, on suppose que $a_n = 0$ pour $n < 0$,

4. Développer $F(z)$ en série et prendre le coefficient de z^n. C'est la forme close de a_n que nous cherchons.

(i) Soit la suite $\{s_n\}_{n\geq 0}$ donnée par (1) $s_0 = 0$, (2) $s_n = s_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$. Déduire la fonction génératrice de s_n et une expression close de s_n.

(ii) La complexité d'un programme (le nombre de calculs élémentaires, ...) est donnée par : (1) $a_0 = 1$, (2) $a_n = 2a_{n-1} + 1$ pour $n \geq 1$ (les tours de Hanoï par exemple). Déduire la fonction génératrice de a_n et une expression close de a_n.

	suite	f. gén.	f. gén.
1	$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$	$\sum_{n \geq 0} n z^n$	$\frac{z}{(1-z)^2}$
2	$1, 2, 3, 4, \ldots, (n+1) \ldots$	$\sum_{n \geq 0} (n+1) z^n$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
3	$1, 2, 4, 8, \ldots, 2^n, \ldots$	$\sum_{n \geq 0} 2^n z^n$	$\frac{1}{(1-2z)}$
4	$1, c, c^2, c^3, \ldots, c^n, \ldots$	$\sum_{n \geq 0} c^n z^n$	$\frac{1}{(1-cz)}$
5	$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$	$\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n} z^n$	$\ln \frac{1}{1-z}$
6	$0, 0, 1, 3, 6, 10, \ldots, C_n^2, \ldots$	$\sum_{n \geq 2} C_n^2 z^n$	$\frac{z^2}{(1-z)^3}$

Suites récurrentes I

Une suite

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots a_k u_{n-k}$$

est une suite définie par *récurrence linéaire homogène.*

Théorème Si l'équation (caractéristique)

$$r^k = a_1 r^{k-1} + a_2 r^{k-2} + \dots + a_k$$

a les solutions distinctes $r_1, r_2, \dots, r_k$ alors

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \dots + \lambda_k r_k^n$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$

Exemple La suite de Fiboncci est définie par :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, \\ 1 & \text{si} \quad n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

l'équation caractéristique est:

$$r^2 = r + 1,$$

ou

$$r^2 - r - 1 = 0$$

avec le solutions

$$r_{1,2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc

$$f_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et les conditions initiales $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ donnent $\lambda_1 = 1/\sqrt{5}$ et $\lambda_2 = -1/\sqrt{5}$

donc

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Suites récurrentes II

Théorème

Si u_n vérifie la récurrence linéaire homogène

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots a_k u_{n-k}$$

alors la série génératrice

$$u(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n = \frac{f(z)}{g(z)}$$

avec

- $g(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \dots - a_k z^k$ et
- le polynôme numérateur est détérminé par les conditions initiales $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ avec $\textit{degré}(f) < \textit{degré}(g)$.

Exemple

$$u_n = 2u_{n-1} + u_{n-2} - 2u_{n-3}$$

avec $u_0 = 0, u_1 = u_2 = 1$

$u_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n)$