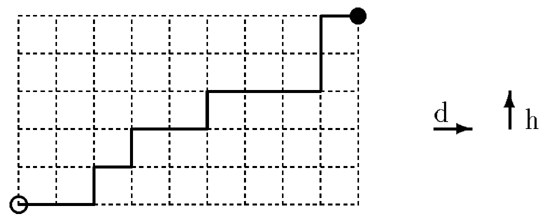
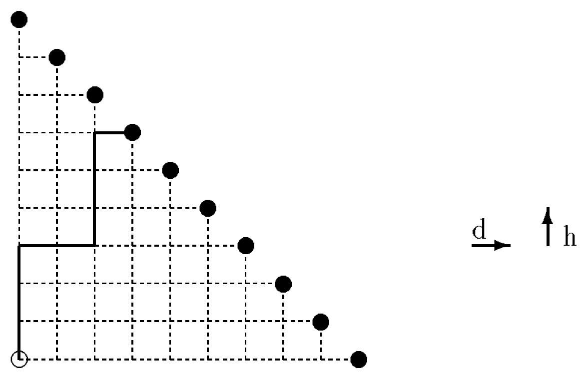
CM2 Combinatoire

Exemple 1. $Ch(n, m)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times m$, où deux pas sont autorisés: h, d.



Exemple 2. $Ch(n)$ l'ensemble des chemins *croissants* dans un reseau orthogonal de taille $n \times n$, où deux pas sont autorisés: h, d.



Définition algébrique Soit $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ un alphabet avec n lettres et X^n l'ensemble des suites sur X de longueur n.

Exemple 3. $X = \{0, 1\}$ et $B_n = X^n$, est l'ensemble de toutes les suites binaires de longueur n.

- $B_3 = \{000, 0001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$;
- $card(B_n) = 2^n$;
- les ensembles $Ch(n)$ et B_n sont en bijection.

Exemple 4. $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $C_{n,m} \subset X^m$ l'ensemble des combinaisons de m parmi n:

$$C_{n,m} = \{c_1 c_2 \ldots c_m \mid c_i < c_j \text{ si } i < j\}$$

- $C_{5,3} = \{123, 124, 125, 134, 135, 145, 234, 235, 245, 345\}$;
- $card(C_{n,m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, les coefficients binomiaux;
- $C_{n,m}$ et $C'_{n,m}$ sont en bijection.

$$C'_{n,m} = \{b_1 b_2 \ldots b_n \mid \text{il existe exactement } m \text{ indices } i \text{ tel que } b_i = 1\}$$

- $C'_{5,3} = \{11100, 110100, 11001, 10110, 10101, 10011, 01110, 01101, 01011, 00111\}$;
- La fonction $\phi : C_{n,m} \to C'_{n,m}$, où $\phi(c_1 c_2 \ldots c_m) = b_1 b_2 \ldots b_n$ est définie par:
  $$b_i = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \exists j \text{ tel que } c_j = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
- $card(C'_{n,m}) = \frac{n!}{m!(n-m)!}$, les coefficients binomiaux
- les ensembles $Ch(n, m)$ et $C'_{n-m,m}$ sont en bijection.

Exemple 6. $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ et $P_n \subset X^n$ l'ensemble des permutations de longueur n:

$$P_n = \{a_1 a_2 \ldots a_n \mid a_i \neq a_j \text{ si } i \neq j\}$$

- $P_3 = \{123, 132, 231, 213, 321, 312\}$;
- $card(P_n) = n!$

1. Codage (représentation linéaire)

2. énumeration (nombre d'ojets dans une classe)

3. bijection

4. génération exhaustive

5. génération aléatoire

6. codes de Gray

Interrêt