CM1 Récursivité

Rappel : les tours de Hanoï. Il y a s_n appels récursifs, avec

$$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 2s_{n-1} + 1 & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

$s_n = ?$

1 Induction

Théorème (premier principe d'induction). Soit $P(n)$ un prédicat (propriété) dépendant de l'entier n. Si les deux conditions suivantes sont verifiées:

(B) $P(0)$ est vrai.

(I) $\forall n \in \mathbf{N}$ $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$

alors $\forall n \in \mathbf{N}$ $P(n)$ est vrai.
Exemple Montrer par récurrece que :

1. Si

   $$s_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 2s_{n-1} + 1 & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

   alors $s_n = 2^n - 1, \forall n \in \mathbf{N}$.

2. $\forall r \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$,

   $$S_n = \sum_{i=0}^{n} r^i = \begin{cases} n+1 \text{ si r} = 1 \\ \frac{r^{n+1}-1}{r-1} \text{ si r} \neq 1 \end{cases}$$

3. $\forall r \in \mathbf{R}, \forall n \in \mathbf{N}$,

   $$T_n = \sum_{i=0}^{n} ir^i = \begin{cases} \frac{n(n+1)}{2} \text{ si r} = 1 \\ \frac{nr^{n+2}-(n+1)r^{n+1}+r}{(r-1)^2} \text{ si r} \neq 1 \end{cases}$$

4. Calculer $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1}$.

Théorème (deuxième principe d'induction). Soit $P(n)$ un prédicat (proprieté) dépendant de l'entier n. Si la condition suvante est verifié:

$\forall n \in \mathbf{N}$ $(\forall k < n, P(k) \Rightarrow P(n))$

alors $\forall n \in \mathbf{N}$ $P(n)$ est vrai.
NB Les deux principes sont équivalents.

2 Suites récurrentes

Une suite

$$u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots a_k u_{n-k}$$

est une suite définie par *récurrence linéaire homogène.*
Théorème Si l'équation (caractéristique)

$$r^n = a_1 r^{n-1} + a_2 r^{n-2} + \dots a_k r^{n-k}$$

a les solutions distinctes $r_1, r_2, \dots, r_k$ alors

$$u_n = \lambda_1 r_1^n + \lambda_2 r_2^n + \lambda_k r_k^n$$

pour tous $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbf{R}$
Exemple La suite de Fiboncci est définie par :

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0, \\ 1 & \text{si} \quad n = 1, \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{si} \quad n > 1. \end{cases}$$

l'équation caractéristique est:

$$r^2 = r + 1,$$

ou

$$r^2 - r - 1 = 0$$

avec le solutions

$$r_{1,2} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

donc

$$f_n = \lambda_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \lambda_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et les conditions initiales $f_0 = 0$, $f_1 = 1$ donnent $\lambda_1 = 1/\sqrt{5}$ et $\lambda_2 = -1/\sqrt{5}$
donc

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$$

3 Sous-programmes récursifs