

Mémoire présenté par

Jean-Luc Baril

en vue de l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches à

l'Université de Bourgogne, Dijon

Spécialité : Combinatoire

Génération exhaustive et étude de structures de classes combinatoires

Soutenu le 15 juin 2010 devant la commission d'examen composée de

Rapporteurs : Elena Barucci (Florence, Italie)
Toufik Mansour (Haïfa, Israël)
Maurice Margenstern (Metz, France)

Examineurs : Abderrafia Koukam (Belfort, France)
Jean-Marcel Pallo (Dijon, France)
Renzo Pinzani (Florence, Italie)
Vincent Vajnovszki (Dijon, France)

Mis en page avec la classe Phdlatl

Remerciements

Une aide très importante m'a été apportée par mes trois collègues combinatoriciens Jean Pallo, Vincent Vajnovszki et Olivier Togni; le fait que nous travaillions ensemble depuis plusieurs années sur des questions d'algorithmique combinatoire m'a conduit à leur faire de nombreux emprunts (parfois inconsciemment). Je les remercie tous très fortement.

Je remercie également les autres membres du laboratoire LE2I de l'université de Bourgogne (Dijon) pour leur soutien et plus particulièrement ceux avec qui j'ai collaboré pour mes tâches et responsabilités d'enseignements.

Je remercie très vivement les rapporteurs, Elena Barcucci, Toufik Mansour et Maurice Margenstern pour le temps qu'ils ont passé à la lecture et l'analyse de ce mémoire. Tous ont accepté spontanément cette tâche; je leur en suis très reconnaissant. Je remercie également Abder Koukam et Renzo Pinzani d'avoir accepté de participer au jury.

Je remercie le Professeur Jacques Martinet de l'université de Bordeaux et j'ai également une pensée particulière pour Anne-Marie Bergé.

Je tiens à remercier très affectueusement Maïté et Eloïse.

Table des matières

Introduction générale	3
Notations	5
I Génération exhaustive de classes d'objets combinatoires	7
I.1 Introduction	7
I.2 Génération CAT	8
I.2.1 Permutations avec un nombre donné d'excédences	8
I.2.2 Permutations et mots de Fibonacci ou de Lucas	11
I.2.2.1 Permutations et mots de Fibonacci généralisés	11
I.2.2.2 Permutations de Lucas généralisées	13
I.2.2.3 Algorithme et complexité	14
I.3 Génération en code de Gray	15
I.3.1 Mots de Lucas p -généralisés	15
I.3.2 Dérangements	18
I.3.3 Permutations ayant un nombre donné de cycles	20
I.3.4 Permutations ayant un nombre donné de minima gauche-droite	23
I.3.5 Permutations évitant un ensemble de motifs	27
I.4 Conclusion - perspectives	30
II Etude de structures énumérées par les nombres de Catalan	33
II.1 Introduction	33
II.2 Treillis de Catalan	34
II.2.1 Le treillis 'Phagocyte'	34
II.2.2 La transformation de taille-greffe	38
II.3 Distance de rotation	44
II.3.1 Sommet de type (2 :0)	47
II.3.2 Sommet de type (1 :1)	47
II.3.3 Sommet de type (3 :0)	47
II.3.4 Sommet de type (2 :1)	48
II.3.5 Algorithme pour le calcul de bornes inférieure et supérieure	48
II.3.6 Résultats expérimentaux	49
II.4 Conclusion	50

III Motifs dans les permutations	51
III.1 Introduction	51
III.2 Duplication en miroir du génome	51
III.2.1 Permutations à motifs exclus et le modèle de WM-duplication	54
III.2.2 Considérations algorithmiques	56
III.2.2.1 Un chemin de $12\dots n$ vers $\sigma \in S_n$ obtenu en reculant à partir de σ	56
III.2.2.2 Un chemin de WM-duplications de $12\dots n$ vers $\sigma \in S_n$	57
III.2.3 Autres modèles de duplication	58
III.2.3.1 Une WM-duplication suivie par plusieurs W-duplications	58
III.2.3.2 Une W- ou WM-duplication suivie par plusieurs W-duplications	58
III.2.4 Future direction de recherche	59
III.3 Cloture cyclique de $S(k(k-1)\dots 21)$	59
III.3.1 La cloture cylindrique	64
III.3.2 Discussion et Conclusion	65
IV Perspectives	67
Annexes	69
Liste des publications	75
Bibliographie	81

Introduction générale

Ce mémoire a pour objectif de fournir une synthèse d'une partie de mes activités de recherche réalisées post-thèse.

Commençons par retracer le parcours effectué depuis l'obtention de mon doctorat. En 1996, j'ai donc soutenu une thèse dans le domaine de la théorie des nombres à l'université de Bordeaux. J'ai obtenu ensuite (1998) un poste de professeur certifié (PRCE) à l'université de Dijon au sein de l'équipe d'informatique. Obtenant l'agrégation de mathématiques en 1999, j'interviens alors en qualité de professeur agrégé (PRAG). Une fois la charge d'enseignements digérée (384H/an), ma curiosité me guide naturellement vers l'équipe d'algorithmique combinatoire de Dijon. C'est alors que j'amorce un parcours initiatique pour découvrir les bases de la combinatoire. Il est toujours difficile de percer les secrets d'un nouveau domaine de recherche, mais l'aide des membres de l'équipe de combinatoire a été sans aucun doute un facteur essentiel dans mon apprentissage. Je suis alors recruté Maître de Conférences au laboratoire LE2I de Dijon en 2004. C'est à ce moment que je découvre la forte interaction entre l'informatique théorique et les mathématiques.

En effet, l'informatique théorique apparaît essentiellement sous la forme de deux courants : l'algorithmique, et la logique. L'algorithmique provient de l'automatisation de la notion de calcul, alors que la logique formalise la notion de démonstration mathématique.

Dans l'antiquité, ces deux notions apparaissaient déjà. On peut citer par exemple, Archimède et Diophante qui obtiennent une règle de calcul de l'aire située sous une parabole ; Euclide pour la notion de système axiomatique ; et Aristote pour la logique propositionnelle. Plus tard, Newton, Leibniz, Euler ou Gauss, proposent des méthodes de calcul numérique permettant d'automatiser certains problèmes issus des mathématiques. Puis la théorie de la calculabilité est développée par Turing (1936) [89], von Neumann, Kleene, Church...

Durant ces dernières années (et sans aucune comparaison avec les noms cités précédemment), mes travaux se sont orientés dans les domaines de l'algorithmique dédiée à des problèmes issus de la combinatoire, la théorie des graphes et l'étude de classes combinatoires ayant une structure de treillis. La référence actuelle du domaine de l'algorithmique combinatoire est la collection de volumes *The art of Computer Programming* de Donald E. Knuth [98]. Knuth étudie de nombreux algorithmes ainsi que leur comportement en terme du nombre d'opérations élémentaires. Il dédie ainsi un volume entier à la génération de classes d'objets combinatoires. On peut aussi citer les travaux de Flajolet, Johnson, Korsh, Ruskey, Sedgwick, Trotter, Vajnovszki, Walsh,...[77, 91, 166, 149, 155, 100, 174]. Pour les références concernant les structures de treillis, on peut aussi considérer Davey et Grätzer [83, 60]. Tous mes travaux concernant les structures en treillis sont issus de classes combinatoires énumérées par les nombres de Catalan A000108, [162]. Enfin, mes travaux concernant la théorie des graphes abordent essentiellement les colorations de graphes. No-

tons toutefois qu'il existe évidemment des liens très forts entre ces trois domaines. On peut citer par exemple le lien entre les cycles Hamiltoniens en théorie des graphes et les codes de Gray en algorithmique combinatoire.

Je n'exposerai pas dans ce mémoire mes travaux concernant les colorations de graphes dans le but d'obtenir un mémoire axé sur la combinatoire issue de structures liées aux permutations, mots binaires et arbres binaires. Si toutefois le lecteur souhaite obtenir mes travaux en théorie des graphes, je l'invite à consulter les articles [27, 28, 29, 30].

Le mémoire est organisé de la façon suivante.

Dans le premier chapitre, je présente une grande partie (non exhaustive) de mes travaux de recherche concernant la génération exhaustive. Ce chapitre contient une partie importante de mes résultats obtenus ces dernières années. Je propose ainsi plusieurs nouveaux algorithmes de génération dont la complexité est CAT (Constant Amortized Time), *i.e.* le nombre d'opérations est proportionnel au nombre d'objets générés et ceci indépendamment de la taille des objets. On étudie également plusieurs classes dont on a obtenu la génération en code de Gray.

Dans le second chapitre, j'expose les travaux concernant l'étude de structures comptées par les nombres de Catalan. En particulier, je donne deux nouvelles structures en treillis pour les parenthésages bien formés ce qui induit deux nouvelles structures sur les arbres binaires. On s'intéresse aussi dans cette partie à la construction de distance sur ces treillis, et notamment on donne un algorithme polynomial d'approximation pour le calcul de la distance de rotation entre deux parenthésages dans le treillis de Tamari. Notons que l'on ne sait toujours pas aujourd'hui s'il existe un algorithme calculant en temps polynomial la distance de rotation entre deux parenthésages dans ce treillis.

Dans le dernier chapitre, j'expose deux contributions récentes dans le domaine de l'étude des motifs dans les permutations. La première est issue d'un problème de bioinformatique puisqu'elle consiste à caractériser les suites du génome obtenues après un nombre donné de duplications en miroir. La seconde répond à une question posée par Atkinson : est-ce que la cloture cyclique de $S(k(k-1) \dots 321)$ possède une base finie ?

Enfin, une conclusion donnera une approche globale de mes travaux de recherches en précisant les objectifs souhaités ainsi que les futures directions de recherches envisagées en proposant des questions encore à explorer.

Notations et définitions

Je présente dans cette partie, les principales notations et définitions utilisées dans ce mémoire.

On note $[n]$ l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. L'ensemble des permutations sur l'ensemble $[n]$ sera noté S_n . L'entier n est appelé la taille de la permutation. On représentera les permutations en notation linéaire, *i.e.*, $\sigma \in S_n$ sera notée $\sigma_1\sigma_2 \dots \sigma_n$ si $\sigma(i) = \sigma_i$ pour tout i , $1 \leq i \leq n$. La permutation $\sigma \in S_n$ sera appelée un cycle lorsqu'il existe une suite d'indices i_1, i_2, \dots, i_n différents deux à deux dans $[n]$ tels que $\sigma(i_j) = i_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq n-1$ et $\sigma(i_n) = i_1$. Une telle permutation pourra aussi être notée $\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle$. Toute permutation $\sigma \in S_n$ peut être uniquement décomposée en un produit de cycles à supports disjoints. On dira que σ a k cycles lorsque cette décomposition possède k cycles. L'ensemble des permutations de taille n ayant k cycles sera noté $S_{n,k}$.

Une valeur σ_i est un minimum gauche-droite (left-to-right minimum en anglais) si tous les éléments à sa gauche dans σ sont plus grands que σ_i . Etant donné que l'ensemble des permutations de taille n ayant k cycles est en bijection avec l'ensemble des permutations de taille n ayant k minima gauche-droite, nous utiliserons toujours la notation $S_{n,k}$ pour ce dernier ensemble.

Un dérangement σ est une permutation sans point fixe, c'est à dire qu'il n'existe pas d'indice i tel que $\sigma(i) = i$. L'ensemble des dérangements de taille n sera noté D_n . Dans le second chapitre, D_n designera l'ensemble des mots de Dyck avec n parenthèses ouvrantes et n fermantes.

Une excédence de σ est une valeur σ_i telle que $\sigma_i > i$. L'ensemble des permutations de taille n ayant k excédences est noté $E_{n,k}$.

Une permutation $\sigma \in S_n$ contient le motif $\pi \in S_k$ si et seulement s'il existe une suite d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ tels que $\sigma(i_1)\sigma(i_2) \dots \sigma(i_k)$ est ordonné comme π . Par exemple, la permutation **4132** contient (en gras) le motif 321 mais ne contient pas (ou évite) le motif 231. Si T est un ensemble de motifs, on notera $S_n(T)$ l'ensemble des permutations dans S_n qui évitent tous les motifs appartenant à T . Un motif barré $\bar{\pi} \in S_k$ est une permutation ayant une barre sur certaines valeurs. Posons $1 \leq r \leq k-1$. Soit π la permutation sur $[k]$ obtenue en enlevant les barres de $\bar{\pi}$ et $\hat{\pi}$ la permutation obtenue de $\bar{\pi}$ en enlevant toutes les $(k-r)$ valeurs barrées et renormalisée comme une permutation de $[k-r]$. Alors $\sigma \in S_n$ ne contient pas le motif $\bar{\pi}$ si tout motif $\hat{\pi}$ dans σ peut être étendu en un motif π dans σ . Par exemple, si $\bar{\pi} = 4\bar{1}32$, alors $\sigma = 58132674 \in S_8(4\bar{1}32)$ (voir, [71, 113, 160]). Il est aussi possible d'introduire des ':' entre les valeurs d'un motif (exemple 13 : 24). Si deux valeurs consécutives du motif π sont séparées par un ':' alors la permutation σ contient le motif π si les entrées correspondantes à ces éléments sont aussi adjacentes dans σ (et bien sur dans le même ordre que dans π). Par exemple, $\sigma = 13524$

ne contient pas le motif $\pi = 13 : 24$ mais contient le motif 1324. Notons qu'il s'agit d'un cas particulier de la définition des motifs définis dans [76].

Une liste \mathcal{L} est un ensemble d'éléments totalement ordonnés. La liste $\overline{\mathcal{L}}$ est la liste \mathcal{L} considérée (ou lue) du dernier élément au premier. Les éléments $prem(\mathcal{L})$ et $der(\mathcal{L})$ désignent respectivement les premiers et derniers éléments de la liste. Si \mathcal{L} et \mathcal{L}' sont deux listes alors on définit la liste $\mathcal{L} \circ \mathcal{L}'$ comme étant la concaténation des deux listes \mathcal{L} et \mathcal{L}' telle que $prem(\mathcal{L}) = prem(\mathcal{L} \circ \mathcal{L}')$.

Soit $(L_n)_{n \geq 1}$ une famille de listes L_n d'éléments de taille n . Si pour tout $n \geq 1$ deux objets consécutifs de la liste L_n diffèrent sur un nombre de positions indépendant de n , on dit que la liste est en ordre de *code de Gray*.

Chapitre I

Génération exhaustive de classes d'objets combinatoires

I.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à des algorithmes permettant de générer exhaustivement (et sans répétition) les objets d'une classe combinatoire. L'intérêt de tels algorithmes est multiple : l'obtention d'une liste complète d'objets (en un temps acceptable) peut être utile pour la vérification où la découverte de propriétés ou conjectures, pour la résolution pratique de certains problèmes NP-complets,... La complexité des algorithmes est donc cruciale. Elle peut être constante en moyenne ou dans le pire des cas. Une complexité constante en moyenne signifie que le nombre d'opérations effectuées est proportionnel au nombre d'objets à générer (CAT - constant amortized time) et ceci indépendamment de la taille des objets ; une complexité constante dans le pire des cas signifie que le passage d'un objet à son successeur se fait toujours en un temps constant indépendant de la taille des objets (loopless). Lorsque deux objets consécutifs diffèrent sur un nombre de positions indépendant de la taille, on dit que la liste est en ordre de code de Gray. Un algorithme loopless liste nécessairement les objets en ordre de code de Gray ; la réciproque n'est pas forcément vraie.

Il existe de nombreux travaux concernant la génération exhaustive efficace de classes combinatoires. Par exemple, il existe des algorithmes efficaces pour la génération des permutations [91, 166, 155, 148], involutions [174], up-down permutations [100, 152], permutations avec un nombre donné d'inversions [151]... Il est toujours intéressant de relire le survol de Carla Savage [154] pour les travaux réalisés avant 1997 concernant les codes de Gray. On trouvera dans ce mémoire de nombreuses références plus récentes.

Plusieurs méthodes différentes ont été utilisées pour l'obtention de tels algorithmes. On peut bien sûr citer la méthode de Johnson-Trotter [91, 166] pour la génération des permutations en ordre de code de Gray. Il y a également des méthodes ad-hoc liées à la structure particulière des objets à générer, mais principalement, deux méthodes sont très souvent utilisées : la méthode récursive et la méthode ECO.

La méthode récursive consiste à définir la liste des objets de taille n en fonction des listes

des objets de tailles inférieures à n . Par exemple, la classe B_n des mots binaires de taille n peut s'écrire récursivement sous la forme $B_n = B_{n-1}.\mathbf{0} \circ \overline{B_{n-1}.\mathbf{1}}$, avec $B_1 = \{0, 1\}$, où \circ est l'opérateur de concaténation des listes, et $\overline{B_{n-1}.\mathbf{1}}$ est la liste B_{n-1} considérée dans l'ordre inverse (de la fin au début). On obtient ainsi, $B_2 = \{\mathbf{00}, \mathbf{10}, \mathbf{11}, \mathbf{01}\}$ et $B_3 = \{\mathbf{000}, \mathbf{100}, \mathbf{110}, \mathbf{010}, \mathbf{011}, \mathbf{111}, \mathbf{101}, \mathbf{001}\}$. Voir par exemple [84]. Dans cet exemple, la liste fournie est aussi en ordre de code de Gray.

La méthode ECO (Enumeration of Combinatorial Objects), introduite par Pinzani et al. [15] pour l'énumération de classes combinatoires, consiste à donner des règles de succession pour étendre un objet de taille n à plusieurs objets de tailles supérieures. Plus formellement, on part de (b) , $b \in \mathbb{N}^+$, et on fournit des règles de succession Ω :

$$\{(k) \rightsquigarrow (e_1(k))(e_2(k)) \dots (e_k(k)), k \in \mathbb{N}\},$$

où $e_i : \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$; il s'agit d'expliquer l'évolution des successeurs $(e_1(k)), (e_2(k)), \dots, (e_k(k))$ en fonction de (k) , $k \in \mathbb{N}^+$. Les entiers positifs (b) , (k) , $(e_i(k))$ sont appelés *étiquettes*. Cela induit un arbre de génération où (b) est l'étiquette de la racine et chaque noeud étiqueté (k) possède k successeurs étiquetés $(e_1(k)), (e_2(k)), \dots, (e_k(k))$. Par conséquent, (Ω) induit une suite d'entiers positifs $(a_n)_{n \geq 0}$ où a_n est le nombre de noeuds sur le niveau n dans l'arbre de génération. Par exemple, la règle de succession Ω définie par $(2) \rightsquigarrow (2)(2)$ initialisée par l'étiquette (2) induit la suite $a_n = 2^n$, *i.e.*, chaque niveau n de l'arbre de génération associé contient 2^n noeuds. Les nombres de Catalan peuvent être obtenus par cette méthode à l'aide de la règle de succession $(k) \rightsquigarrow (2)(3) \dots (k+1)$ initialisée par l'étiquette (2) .

La première partie de ce chapitre traite de la génération CAT alors que la seconde traite de la génération en code de Gray.

I.2 Génération CAT

Dans cette section, nous donnons les différents résultats obtenus concernant la génération CAT (constant amortized time) de certaines classes d'objets combinatoires. Rappelons que la génération CAT consiste à générer une et une seule fois chaque élément d'une classe en un temps proportionnel au nombre d'objets mais indépendant de la taille des objets. [Dans ce paragraphe, nous ne considérerons pas les générations en code de Gray ; en effet, ces générations sont aussi CAT mais possèdent la propriété supplémentaire que deux objets consécutifs diffèrent d'un nombre de positions indépendant de la taille.]

De nombreux algorithmes de générations efficaces existent dans la littérature. Par exemple, on peut se référer aux deux survols suivants [98, 155] pour la génération de plusieurs classes de permutations.

On présente ci-dessous deux algorithmes de génération CAT permettant de générer efficacement les permutations ayant un nombre donné d'excédences, les permutations et les mots de Fibonacci et de Lucas.

I.2.1 Permutations avec un nombre donné d'excédences

Ce paragraphe est issu de l'article [20]. Soit une permutation $\sigma \in S_n$. On représente $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ en notation linéaire. La valeur σ_i est une excédence de σ si $\sigma(i) > i$.

Les permutations ayant un nombre donné d'excédences ont été très étudiées dans le domaine de la combinatoire énumérative [39, 72, 116, 140]. Foata et Schützenberger [78] donnent plusieurs propriétés fondamentales pour ces objets. De nombreuses applications à l'analyse des algorithmes sont obtenues par Knuth [98] et à la combinatoire des mots par Lothaire [108]. La statistique relative aux excédences sur les permutations est appelée statistique Eulerienne. Je donne dans ce paragraphe un algorithme efficace (CAT) de génération des permutations avec k excédences ($k \geq 0$). On note $E_{n,k}$ l'ensemble des permutations de taille n ayant k excédences. On procède par la méthode récursive en remarquant que $E_{n,k}$ peut être construit à partir de $E_{n-1,k}$ et $E_{n-1,k-1}$.

Soit $\gamma \in E_{n-1,k}$ une permutation de taille $(n-1)$ ayant k excédences, $n \geq 2$, $0 \leq k \leq n-2$; soit i un entier, $1 \leq i \leq n-1$. Si on note par σ la permutation dans S_n obtenue à partir de γ en remplaçant $\gamma(i)$ par n et en ajoutant $\gamma(i)$ sur la droite de γ , alors on a :

- (a) si $\gamma(i)$ est une excédence dans γ , alors $\sigma \in E_{n,k}$;
- (b) sinon, $\sigma \in E_{n,k+1}$.

De plus, (c) si σ est obtenue de γ en ajoutant n sur sa droite, alors $\sigma \in E_{n,k}$. Réciproquement, chaque permutation de $E_{n,k}$, $n \geq 2$, peut être uniquement obtenue par l'une de ces trois constructions (a), (b) et (c).

Ainsi, nous définissons deux fonctions ϕ_n et ψ_n comme suit :

Définition I.1. Pour $0 \leq k \leq n-2$, un entier $i \in [n-1]$ et une permutation $\gamma \in E_{n-1,k}$, on définit une permutation de taille n : $\sigma = \phi_{n-1}(i, \gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} n & \text{si } j = i \\ \gamma(i) & \text{si } j = n \\ \gamma(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit aussi ψ_{n-1} de $E_{n-1,k}$ vers S_n qui transforme $\gamma \in E_{n-1,k}$ en une permutation $\sigma \in E_{n,k}$ obtenue de γ en ajoutant n sur sa droite.

Par exemple, si $\gamma = 3142 \in E_{4,2}$, on a $\phi_4(3, \gamma) = 31524 \in E_{5,2}$; $\phi_4(2, \gamma) = 35421 \in E_{5,3}$ et $\psi_4(\gamma) = 31425 \in E_{5,2}$. Plus généralement, on peut remarquer :

$$\phi_{n-1}(i, \gamma) = \psi_{n-1}(\gamma) \cdot \langle i, n \rangle = \langle \gamma(i), n \rangle \cdot \psi_{n-1}(\gamma).$$

Pour des raisons de clarté, on omettra l'indice n dans ϕ_n et ψ_n .

Lemme I.2. Soient n, m, ℓ, k quatre entiers naturels tels que $1 \leq m < n$, $0 \leq \ell \leq m-1$, et $0 \leq k \leq n-1$. Soit aussi $\gamma \in E_{m,\ell}$.

- S'il existe i , $1 \leq i \leq m-1$, tel que $\gamma(i)$ est une excédence de γ , alors il y a une permutation $\sigma \in E_{n,k}$ telle que σ est obtenue de $\phi(i, \gamma)$ (respectivement $\psi(\gamma)$) en appliquant plusieurs fois les fonctions ϕ et ψ si et seulement si : (i) $\ell \leq k$ et $m+1-\ell \leq n-k$.
- Maintenant nous considérons i , $1 \leq i \leq m$, tel que $\gamma(i)$ n'est pas une excédence de γ , alors il y a une permutation $\sigma \in E_{n,k}$ telle que σ est obtenue de $\phi(i, \gamma)$ en appliquant plusieurs fois les fonctions ϕ et ψ si et seulement si : (ii) $\ell+1 \leq k$ et $m-\ell \leq n-k$.
- Si $\sigma \in E_{n,k}$ est obtenue de $\gamma \in E_{m,\ell}$ par la première construction et $\tau \in E_{n,k}$ par la seconde, alors σ et τ sont différentes.

Maintenant nous expliquons les principales difficultés pour l'implémentation de la procédure **gen**(m, ℓ) donnée en figure I.1. La procédure **gen**(1, 0) génère récursivement toutes les permutations $\sigma \in E_{n,k}$. En effet, supposons que lorsque l'on exécute l'appel récursif **gen**(m, ℓ), la permutation courante est $\sigma \in E_{m,\ell}$ et ses excédences sont en positions i_1, i_2, \dots, i_ℓ . Le tableau t_1 contient ces ℓ positions i_1, i_2, \dots, i_ℓ . D'un autre côté les indices dans $[m] \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$ sont stockés dans t_2 de taille $r = m - \ell$. Grâce au lemme I.2, la procédure **gen**(m, ℓ) génère les permutations de $E_{m+1,\ell}$ ou de $E_{m+1,\ell+1}$ en appliquant sur σ les fonctions ϕ et/ou ψ . Pour obtenir :

- $\psi(\sigma) \in E_{m+1,\ell}$; on ajoute l'indice $(m + 1)$ sur la droite de t_2 ($t_2[r + 1] = m + 1$) et on exécute **gen**($m + 1, \ell$).
- $\phi(i_j, \sigma)$ avec $j \in [\ell]$; on ajoute $(m + 1)$ sur la droite de t_2 ($t_2[r + 1] = m + 1$). On actualise $\sigma = \sigma \cdot \langle t_1[j], m + 1 \rangle$ et on exécute **gen**($m + 1, \ell$).
- $\phi(i, \sigma)$ avec $i \notin \{i_1, i_2, \dots, i_\ell\}$; *i.e.*, pour chaque $j \leq r$, on pose $temp = t_2[j]$. On ajoute $temp$ sur la droite de t_1 ($t_1[\ell + 1] = temp$) et on remplace $t_2[j]$ par $m + 1$; alors on actualise $\sigma = \sigma \cdot \langle temp, m + 1 \rangle$ et on exécute **gen**($m + 1, \ell + 1$).

Après chaque appel récursif, on actualise t_1, t_2 et σ pour retrouver leur valeur avant l'appel. Ces opérations requièrent une complexité $\mathcal{O}(1)$. Voir l'algorithme en figure I.1.

<pre> procedure gen(m, ℓ) $r := m - \ell$ if $m = n$ then output σ; else if $\ell \leq k$ and $m + 1 - \ell \leq n - k$ then $t_2[r + 1] := m + 1$ gen($m + 1, \ell$) for each $v \in [\ell]$ $\sigma := \sigma \cdot \langle t_1[v], m + 1 \rangle$ gen($m + 1, \ell$) $\sigma := \sigma \cdot \langle t_1[v], m + 1 \rangle$ if $\ell + 1 \leq k$ and $m - \ell \leq n - k$ then for each $v \in [r]$ $t_1[\ell + 1] := t_2[v]$ $temp := t_2[v]; t_2[v] := m + 1$ $\sigma := \sigma \cdot \langle temp, m + 1 \rangle$ gen($m + 1, \ell + 1$) $\sigma := \sigma \cdot \langle temp, m + 1 \rangle$ $t_2[v] := temp$; end procedure </pre>	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <thead> <tr> <th colspan="2">$E_{4,1}$</th> <th colspan="2">$E_{4,2}$</th> <th colspan="2">$E_{5,1}$</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>1</td><td>4231</td><td>1</td><td>3241</td><td>1</td><td>52341</td><td>14</td><td>52134</td></tr> <tr><td>2</td><td>1432</td><td>2</td><td>3412</td><td>2</td><td>15342</td><td>15</td><td>13245</td></tr> <tr><td>3</td><td>1243</td><td>3</td><td>4321</td><td>3</td><td>12543</td><td>16</td><td>15243</td></tr> <tr><td>4</td><td>3214</td><td>4</td><td>1342</td><td>4</td><td>12354</td><td>17</td><td>14235</td></tr> <tr><td>5</td><td>4213</td><td>5</td><td>2431</td><td>5</td><td>42315</td><td>18</td><td>15234</td></tr> <tr><td>6</td><td>1324</td><td>6</td><td>2143</td><td>6</td><td>52314</td><td>19</td><td>21345</td></tr> <tr><td>7</td><td>1423</td><td>7</td><td>3421</td><td>7</td><td>14325</td><td>20</td><td>51342</td></tr> <tr><td>8</td><td>2134</td><td>8</td><td>3142</td><td>8</td><td>15324</td><td>21</td><td>41325</td></tr> <tr><td>9</td><td>4132</td><td>9</td><td>2314</td><td>9</td><td>12435</td><td>22</td><td>51324</td></tr> <tr><td>10</td><td>3124</td><td>10</td><td>4312</td><td>10</td><td>12534</td><td>23</td><td>31245</td></tr> <tr><td>11</td><td>4123</td><td>11</td><td>2413</td><td>11</td><td>32145</td><td>24</td><td>51243</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>12</td><td>52143</td><td>25</td><td>41235</td></tr> <tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>13</td><td>42135</td><td>26</td><td>51234</td></tr> </tbody> </table>	$E_{4,1}$		$E_{4,2}$		$E_{5,1}$		1	4231	1	3241	1	52341	14	52134	2	1432	2	3412	2	15342	15	13245	3	1243	3	4321	3	12543	16	15243	4	3214	4	1342	4	12354	17	14235	5	4213	5	2431	5	42315	18	15234	6	1324	6	2143	6	52314	19	21345	7	1423	7	3421	7	14325	20	51342	8	2134	8	3142	8	15324	21	41325	9	4132	9	2314	9	12435	22	51324	10	3124	10	4312	10	12534	23	31245	11	4123	11	2413	11	32145	24	51243					12	52143	25	41235					13	42135	26	51234
$E_{4,1}$		$E_{4,2}$		$E_{5,1}$																																																																																																											
1	4231	1	3241	1	52341	14	52134																																																																																																								
2	1432	2	3412	2	15342	15	13245																																																																																																								
3	1243	3	4321	3	12543	16	15243																																																																																																								
4	3214	4	1342	4	12354	17	14235																																																																																																								
5	4213	5	2431	5	42315	18	15234																																																																																																								
6	1324	6	2143	6	52314	19	21345																																																																																																								
7	1423	7	3421	7	14325	20	51342																																																																																																								
8	2134	8	3142	8	15324	21	41325																																																																																																								
9	4132	9	2314	9	12435	22	51324																																																																																																								
10	3124	10	4312	10	12534	23	31245																																																																																																								
11	4123	11	2413	11	32145	24	51243																																																																																																								
				12	52143	25	41235																																																																																																								
				13	42135	26	51234																																																																																																								

FIGURE I.1 : Algorithme de génération pour les permutations avec un nombre fixé d'excédences et les listes $E_{4,1}$, $E_{4,2}$ et $E_{5,1}$.

L'algorithme produit les permutations de $E_{n,k}$ en temps amorti constant (CAT); en effet, dans la procédure le nombre de calculs est proportionnel au nombre d'appels récursifs. De plus, chaque appel récursif produit au moins un objet ou produit deux autres appels récursifs. Une implementation Java de cet algorithme peut être vue à l'adresse <http://www.u-bourgogne.fr/jl.baril/applet.html>.

I.2.2 Permutations et mots de Fibonacci ou de Lucas

Le contenu de cette partie est issu de l'article [17]. Nous utiliserons ici la méthode ECO (Enumeration of Combinatorial Objects) définie en 1999 par Pinzani et al. [15]. Il s'agit de fournir des règles de successions permettant de construire un arbre de génération dont les noeuds d'un niveau n sont les objets de la classe combinatoire considérée. On présente ci-dessous des algorithmes de génération basés sur ECO permettant de générer efficacement (CAT) les mots de Fibonacci et de Lucas p -généralisés. L'arbre de génération obtenu nous permet d'obtenir plusieurs bijections entre ces classes et des classes de permutations à motif exclus. Nous obtenons ainsi la génération CAT de nouvelles classes de permutations.

I.2.2.1 Permutations et mots de Fibonacci généralisés

Un mot de Fibonacci p -généralisé de taille n est un mot binaire de taille n n'ayant pas p uns consécutifs. Par exemple, le mot 110001010111 est un mot de Fibonacci 4 généralisé de taille 12. Soit $F_{n,p}$ l'ensemble des mots de Fibonacci p -généralisés de taille n . La cardinalité de cette ensemble est donnée par la suite de Fibonacci généralisée $f_{n,p}$ définie par $f_{n,p} = f_{n-1,p} + \dots + f_{n-p,p}$ initialisée par $f_{n,p} = 0$ si $n = 0$ et $f_{1,p} = 1$. En fait, on a plus précisément : $|F_{n,p}| = f_{n+2,p}$. On définira par la suite ce qu'est une permutation de Fibonacci généralisée.

Le théorème suivant donne les règles de successions pour la suite $f_{n,p}$ de Fibonacci p -généralisée.

Théorème I.3. *Pour $p \geq 2$, un système de règles de succession (Ω_p) pour la suite $f_{n,p}$ de Fibonacci p -généralisée est donné par :*

$$(\Omega_p) \left\{ \begin{array}{l} (2_{p-1}) \\ (2_{p-1}) \rightsquigarrow (2_{p-1})(2_{p-2}) \\ (2_{p-2}) \rightsquigarrow (2_{p-1})(2_{p-3}) \\ \dots \\ (2_1) \rightsquigarrow (2_{p-1})(1) \\ (1) \rightsquigarrow (2_{p-1}). \end{array} \right.$$

Par un simple calcul utilisant les matrices de production [64], on déduit la fonction génératrice de la suite engendrée par Ω_p [71] :

$$f_p(z) = \frac{1 + z + z^2 + \dots + z^{p-1}}{1 - z - z^2 - \dots - z^p} = \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \sum_{i=1}^p z^i} - 1 \right).$$

Puisque $f_p(z) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \frac{1}{1-2z}$, Ω_p produit une sorte de continuité discrète entre les suites de Fibonacci p -généralisées ($p \geq 2$) et la suite 2^n .

Proposition I.4. *L'arbre de génération de (Ω_p) peut être codé par les mots de Fibonacci p -généralisés, i.e., les mots binaires n'ayant pas p uns consécutifs. Un mot de taille n est obtenu à partir d'un mot de taille $(n-1)$ en insérant la valeur 0 ou 1 en dernière position (Voir figure I.2).*

Dans toute la suite une position (ou site) dans un mot (ou une permutation) est un emplacement dans un mot avant la première lettre ou après la dernière lettre ou entre deux lettres du mot. Lorsque l'on permet l'insertion d'une lettre sur une position d'un mot, alors on dira que la position est un site actif.

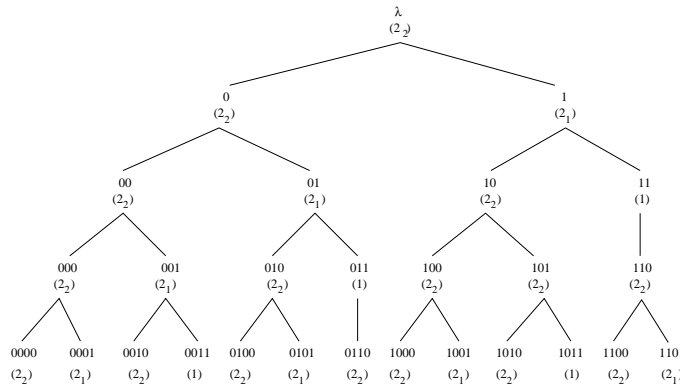


FIGURE I.2 : Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération codé par les mots de Fibonacci 3-généralisés.

L'arbre de génération précédent induit une bijection entre $F_{n,p}$ et deux ensembles de permutations à motifs exclus (voir la définition d'un motif dans une permutation dans le paragraphe Notations et Définitions). Ceci explique la raison pour laquelle on peut appeler permutation de Fibonacci p -généralisée une permutation appartenant à l'un de ces deux ensembles de permutations.

Théorème I.5. *L'arbre de génération de (Ω_p) peut être codé par les permutations π dans $S_n(321, 312, 234 \dots (p+1)1)$. Les sites actifs de π sont les deux dernières positions si l'étiquette de π est (2_i) ; sinon seulement la dernière position est un site actif. (Voir figure I.3).*

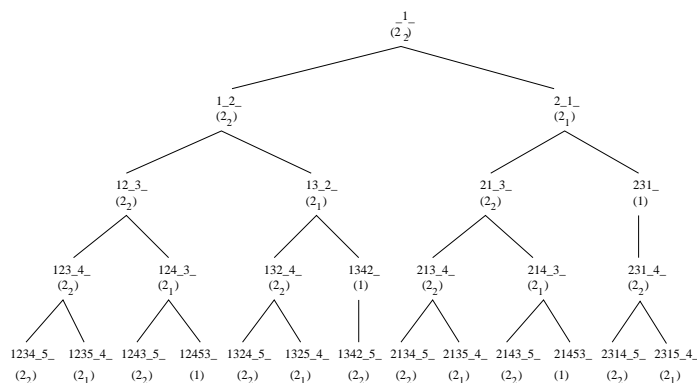


FIGURE I.3 : Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération de (Ω_3) codé par les permutations de Fibonacci 3-généralisées $S_n(321, 312, 2341)$. Les sites actifs sont représentés en soulignés.

Théorème I.6. *L'arbre de génération de (Ω_p) peut être codé par les permutations de Fibonacci généralisées π dans $S_n(231, 312, (p+1)p \dots 321)$. Une permutation π a toujours un*

site actif sur sa dernière position ; de plus, dans le cas où le label est (2_i) , un autre site actif se situe juste avant l'entrée maximale de la permutation π .

I.2.2.2 Permutations de Lucas généralisées

Un mot de Lucas p -généralisé est un mot de Fibonacci p -généralisé n'ayant pas p uns consécutifs lorsqu'on considère le mot circulairement. Par exemple, le mot 1010011 n'est pas un mot de Lucas 3-généralisé puisque 111 est contenu dans le mot (considéré circulairement). Soit $L_{n,p}$ l'ensemble des mots de Lucas p -généralisés de taille n . Pour $n < p$ on impose par convention que le mot 1^n est dans $L_{n,p}$. La cardinalité de $L_{n,p}$ est donnée par la suite $\ell_{n,p}$ définie par : $\ell_{n,p} = \ell_{n-1,p} + \dots + \ell_{n-p,p}$ initialisée par $\ell_{n,p} = 2^n - 1$ si $0 < n \leq p$. En fait on a précisément $|L_{n,p}| = \ell_{n,p} + 1$ si $n < p$, et $|L_{n,p}| = \ell_{n,p}$ sinon. Le théorème suivant donne les règles de succession pour la suite de Lucas p -généralisée.

Théorème I.7. *Pour $p \geq 2$, un système de règles de succession (Φ_p) pour la suite de Lucas p -généralisée est :*

$$(\Phi_p) \left\{ \begin{array}{l} (2'_{p-1}) \\ (2'_{p-1}) \rightsquigarrow (2_{p-1})(2'_{p-2}) \\ (2'_{p-2}) \rightsquigarrow (2_{p-2})(2'_{p-3}) \\ \dots \\ (2'_1) \rightsquigarrow (2_1)(1') \\ (1') \rightsquigarrow (1) \\ (2_{p-1}) \rightsquigarrow (2_{p-1})(2_{p-2}) \\ (2_{p-2}) \rightsquigarrow (2_{p-1})(2_{p-3}) \\ \dots \\ (2_1) \rightsquigarrow (2_{p-1})(1) \\ (1) \rightsquigarrow (2_{p-1}), \end{array} \right.$$

ce qui signifie que (Φ_p) produit la suite $\ell_{p,n}$ si $n > p$ et $\ell_{p,n} + 1 = 2^n$ sinon.

Par un simple calcul utilisant les matrices de production [64], la fonction génératrice de la suite associée à (Φ_p) est :

$$\ell_p(z) = \frac{\sum_{i=0}^{p-1} (z^i - i \cdot z^{2p-i})}{1 - z - z^2 - \dots - z^p}.$$

On obtient une continuité discrète entre la suite de Lucas p -généralisée est la suite 2^n .

L'arbre de génération obtenu ne peut pas être codé directement par les mots de Lucas de $L_{n,p}$. Cependant, on peut coder cet arbre en utilisant un ensemble $K_{n,p} \subseteq F_{n,p}$; $K_{n,p}$ est l'ensemble des mots de $F_{n,p}$ qui contiennent au moins deux 0s dans leur préfixe de longueur $p + 1$.

Proposition I.8. *L'arbre de génération de (Φ_p) peut être codé par les mots de l'ensemble $K_{p,n}$. Un mot de taille n est obtenu d'un mot de taille $n - 1$ en insérant 0 ou 1 sur la dernière position.*

L'arbre de génération induit aussi une bijection entre $L_{n,p}$ et des ensembles de permutations à motifs exclus dont les éléments seront appelés permutations de Lucas p -généralisées.

Théorème I.9. *Soit*

$$T_p = \begin{cases} \bar{1}34 \dots (p+1)2 : (p+3)(p+2) \\ \bar{1}34 \dots p2 : (p+2)(p+3)(p+1) \\ \dots \\ \bar{1}32 : 56 \dots (p+3)4. \end{cases}$$

Le système de règles de succession (Φ_p) produit un arbre de génération codé par les permutations de Lucas p -généralisées $S_n(321, 312, 234 \dots (p+1)1, T_p)$. Les sites actifs sont les deux dernières positions si l'étiquette est (2_i) ou $(2'_i)$; sinon, seulement la dernière position est active (voir figure I.4).

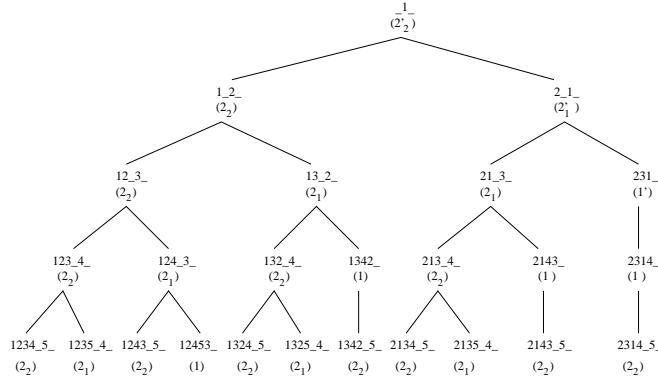


FIGURE I.4 : Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération de (Φ_3) . Chaque noeud est codé par une permutation de Lucas dans $S_n(321, 312, 2341, \bar{1}342 : 65, \bar{1}32 : 564)$.

Théorème I.10. *Soit*

$$T'_p = \begin{cases} \bar{1}(p+1)p \dots 32 : (p+3)(p+2) \\ \bar{1}p(p-1) \dots 32 : (p+3)(p+2)(p+1) \\ \dots \\ \bar{1}32 : (p+3)(p+2) \dots 54. \end{cases}$$

L'arbre de génération de (Φ_p) peut être codé par les permutations de Lucas π dans $S_n(231, 312, (p+1)p \dots 321, T'_p)$. Une permutation π a toujours un site actif en dernière position; de plus, dans le cas où l'étiquette est (2_i) ou $(2'_i)$, elle en possède un autre qui est juste avant l'entrée maximale de π .

I.2.2.3 Algorithme et complexité

Tous les ensembles étudiés précédemment peuvent être générés de façon plus ou moins efficace. Je donne ici seulement les algorithmes de génération des ensembles de Lucas $S_n(321, 312, 234 \dots (p+1)1, T_p)$ et $S_n(231, 312, (p+1)p \dots 321, T'_p)$. Un résumé de la complexité des algorithmes trouvés est présenté à la fin de ce paragraphe dans la table I.1. Notons que le fait de pouvoir générer $K_{n,p}$ en $\mathcal{O}(1)$ nous permet de générer facilement $L_{n,p}$ en $\mathcal{O}(p)$.

```

l1gen(i, k)
if i = n then output  $\sigma$  ;
else
  if k  $\neq$  0 then
    f1gen(i + 1, k) ;
     $\sigma = \sigma \cdot \langle i, i + 1 \rangle$  ;
    l1gen(i + 1, k - 1) ;
     $\sigma = \sigma \cdot \langle i, i + 1 \rangle$  ;
  else f1gen(i + 1, 0) ;
end ;

```

```

l2gen(i, k, t)
if i = n then output  $\sigma$  ;
else
  if k  $\neq$  0 then
    f2gen(i + 1, k, i + 1) ;
    for j = i downto t
       $\sigma = \sigma \cdot \langle j, j + 1 \rangle$  ;
    l2gen(i + 1, k - 1, t) ;
    for j = t to i
       $\sigma = \sigma \cdot \langle j, j + 1 \rangle$  ;
    else f2gen(i + 1, 0, i + 1) ;
end ;

```

Ensembles généré	Complexité en moyenne
$F_{p,n}$	$\mathcal{O}(1)$
$S_n(321, 312, 234 \dots (p+1)1)$	$\mathcal{O}(1)$
$S_n(231, 312, (p+1)p \dots 321)$	$\mathcal{O}(p)$
$K_{p,n}$	$\mathcal{O}(1)$
$L_{p,n}$	$\mathcal{O}(p)$
$S_n(321, 312, 234 \dots (p+1)1, T_p)$	$\mathcal{O}(1)$
$S_n(231, 312, (p+1)p \dots 321, T'_p)$	$\mathcal{O}(p)$

TABLE I.1 : Complexité moyenne pour la génération de chaque classe.

I.3 Génération en code de Gray

Le contenu de cette partie est issu des cinq articles [19, 26, 25, 24, 31]. Elle présente des codes de Gray pour l'ensemble $L_{n,p}$ des mots de Lucas p -généralisés définis précédemment, pour l'ensemble des dérangements, *i.e.*, l'ensemble des permutations n'ayant pas de point fixe, pour l'ensemble des permutations ayant un nombre donné de cycles, ou de minima gauche-droite, et enfin pour une famille large de classes de permutations évitant un ensemble de motifs.

I.3.1 Mots de Lucas p -généralisés

Rappelons que l'ensemble $L_{n,p}$ des mots de Lucas p -généralisés de taille n est l'ensemble des mots binaires de taille n ne contenant pas p uns consécutifs (les mots étant considé-

rés circulairement). Par exemple, le mot 100011 est dans $L_{6,4}$ mais n'est pas dans $L_{6,3}$. L'ensemble des mots de Fibonacci p -généralisés est encore noté $F_{n,p}$. Remarquons qu'un code de Gray est déjà connu pour $F_{n,p}$ [167]. Nous avons (dans le paragraphe précédent) obtenu une génération en $\mathcal{O}(p)$ de $L_{n,p}$. Nous donnons ici un code de Gray pour $L_{n,p}$ et un algorithme de génération en $\mathcal{O}(1)$.

Dans un premier temps on obtient une condition pour qu'il existe un code de Gray pour $L_{n,p}$ tel que deux éléments successifs diffèrent d'une et une seule position. Pour cela, il est nécessaire que la différence du nombre de mots de Lucas ayant un nombre pair de uns avec le nombre de mots de Lucas ayant un nombre impair de uns, soit comprise entre -1 et 1.

Soient $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ les suites de différences de parité correspondantes aux suites généralisées de Fibonacci et Lucas :

- $\phi_n = \text{card}(F''_{n,p}) - \text{card}(F'_{n,p})$, et
- $\lambda_n = \text{card}(L''_{n,p}) - \text{card}(L'_{n,p})$.

ou $F''_{n,p}$ (resp. $L''_{n,p}$) est l'ensemble des mots de Fibonacci (resp. Lucas) ayant un nombre pair de uns, et $F'_{n,p}$ (resp. $L'_{n,p}$) est l'ensemble des mots de Fibonacci (resp. Lucas) ayant un nombre impair de uns.

Lemme I.11. 1. ϕ_n vérifie

$$\phi_n = \phi_{n-1} - \phi_{n-2} + \cdots + (-1)^{p+1} \phi_{n-p}, \text{ pour } n \geq p+1, \quad (\text{I.1})$$

2. λ_n est lié à ϕ_n par

$$\lambda_n = \phi_{n-2} - 2 \cdot \phi_{n-3} + \cdots + (-1)^{p+1} p \cdot \phi_{n-p-1}, \text{ pour } n \geq p+2. \quad (\text{I.2})$$

Proposition I.12. Si $\phi(z)$ et $\lambda(z)$ sont les fonctions génératrices pour les suites $\{\phi_n\}_{n \geq 0}$ et $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ respectivement alors

1.

$$\phi(z) = \phi_0 + z \cdot (-z)^{p-1} \cdot \frac{1+z}{1-(-z)^{p+1}}, \quad (\text{I.3})$$

2.

$$\lambda(z) = \sum_{j=0}^{p+1} \lambda_j z^j + z^{p+2} \cdot (-1)^{p+1} \cdot \frac{1 - (p+1)(-z)^p + p(-z)^{p+1}}{(1-(-z)^{p+1}) \cdot (1+z)}. \quad (\text{I.4})$$

Corollaire I.13. La suite $\{\lambda_n\}_{n \geq p+2}$ est périodique de période $2(p+1)$. De plus, si on définit $\lambda_n = \lambda_{n+2(p+1)}$ pour tout $n = 0, 1, \dots, p+1$ alors sa fonction génératrice est

$$\lambda(z) = \frac{(-z)^{p+1} + (p+1)z + p}{(1-(-z)^{p+1}) \cdot (1+z)}. \quad (\text{I.5})$$

Corollaire I.14. La suite des différences de parités correspondant aux mots de Lucas vérifie

$$\lambda_{n,p} = \begin{cases} (-1)^{n+1} & \text{si } (p+1) \nmid n, \\ (-1)^n \cdot p & \text{si } (p+1) | n. \end{cases} \quad (\text{I.6})$$

Théorème I.15. Si l'ensemble $L_{n,p}$ admet un code de Gray alors $(p+1) \nmid n$.

Considérons la relation d'ordre suivante utilisée pour obtenir un code de Gray pour les mots de Fibonacci généralisés [167].

Définition I.16. On dit que \mathbf{x} est plus petit que \mathbf{y} en ordre local réfléchi, noté par $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$, si $\sum_{j=1}^i (1 - x_j)$ est impair et $\sum_{j=1}^i (1 - y_j)$ est pair, où i est la position la plus à gauche telle que $x_i \neq y_i$.

Soit alors $\mathcal{L}_{n,p}$ la liste ordonnée obtenue avec cette relation d'ordre. On peut montrer que :

Théorème I.17. $\mathcal{L}_{n,p}$ est un code de Gray optimal. Plus précisément,

1. Si $(p+1) \nmid n$ alors $\mathcal{L}_{n,p}$ est un 1-code de Gray pour $L_{n,p}$.
2. Si $(p+1) | n$ alors $\mathcal{L}_{n,p}$ est un 2-code de Gray pour $L_{n,p}$ et il y a exactement $p-1$ mots vérifiant $d(\mathbf{x}, \text{succ}(\mathbf{x})) = 2$.

La table suivante présente les codes de Gray obtenus pour l'ensemble $L_{n,p}$ lorsque $(n,p) = (4,2)$ et $(n,p) = (4,3)$.

$\mathcal{L}_{4,2}$	$\mathcal{L}_{4,3}$
0 1 0 0	0 1 1 0
0 1 0 1	0 1 0 0
0 0 0 1	0 1 0 1
0 0 0 0	0 0 0 1
0 0 1 0	0 0 0 0
1 0 1 0	0 0 1 0
1 0 0 0	0 0 1 1
	1 0 1 0
	1 0 0 0
	1 0 0 1
	1 1 0 0

TABLE I.2 : Les listes $\mathcal{L}_{4,2}$ et $\mathcal{L}_{4,3}$. Les modifications de bits sont en gras.

Un algorithme de génération CAT pour cette liste est naturellement obtenu par une simple adaptation de l'algorithme présenté dans [167].

I.3.2 Dérangements

Un *dérangement* de taille n est une permutation $\pi \in S_n$ sans point fixe, c'est à dire telle que $\pi(i) \neq i$ pour tout $i \in [n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Si D_n est l'ensemble de tous les dérangements de taille n , une relation de récurrence pour $d_n = \text{card}(D_n)$ est donnée par :

$$d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) \quad (\text{I.7})$$

pour $n \geq 2$, avec $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$, voir par exemple [58, p. 180] ou [165, p. 67].

La construction du code de Gray ci-dessous pour l'ensemble D_n est basée sur une preuve combinatoire de la relation (I.7) ci-dessus.

Définition I.18. 1. Pour $n \geq 3$, un entier $i \in [n-1]$, et un dérangement $\tau \in D_{n-1}$, on définit une permutation $\sigma = \phi_n(i, \tau)$ de taille n par

$$\sigma(j) = \begin{cases} n & \text{si } \tau(j) = i \\ i & \text{si } j = n \\ \tau(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour $n \geq 4$, un entier $i \in [n-1]$ et un dérangement $\tau \in D_{n-2}$ on définit une permutation $\sigma = \psi_n(i, \tau)$ de taille n par

$$\sigma(j) = \begin{cases} i & \text{si } j = n \\ n & \text{si } j = i \\ \tau(j) & \text{si } j < i \text{ et } \tau(j) < i \\ \tau(j) + 1 & \text{si } j < i \text{ et } \tau(j) \geq i \\ \tau(j-1) & \text{si } j > i \text{ et } \tau(j-1) < i \\ \tau(j-1) + 1 & \text{si } j > i \text{ et } \tau(j-1) \geq i. \end{cases}$$

Remarque : Si $\sigma \in D_n$, $n \geq 4$, et $i = \sigma(n)$, alors

1. si $\sigma(i) \neq n$ (n n'est pas dans une transposition dans σ) alors $\sigma = \phi_n(i, \tau)$ avec τ la permutation représentée par les $n-1$ premières entrées de $\langle i, n \rangle \cdot \sigma$;
2. si $\sigma(i) = n$ (n est dans une transposition dans σ) alors $\sigma = \psi_n(i, \tau)$ avec τ la permutation représentée par la forme normale de la suite $(\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(i-1), \sigma(i+1), \dots, \sigma(n-1))$.

◇

Soit \mathcal{D}_n la liste pour l'ensemble D_n définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_n &= \phi(1, \mathcal{D}_{n-1}) \circ \psi(1, \overline{\mathcal{D}}_{n-2}) \\ &\quad \circ \psi(2, \mathcal{D}_{n-2}) \circ \phi(2, \overline{\mathcal{D}}_{n-1}) \\ &\quad \circ \phi(3, \mathcal{D}_{n-1}) \circ \psi(3, \overline{\mathcal{D}}_{n-2}) \\ &\quad \vdots \\ &= \bigcirc_{i=1}^{n-1} (\phi(i, \mathcal{D}_{n-1}) \circ \psi(i, \overline{\mathcal{D}}_{n-2}))^{(i+1)} \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

pour $n \geq 3$, et $\mathcal{D}_1 = \psi(1, \emptyset) = \psi(2, \emptyset) = \emptyset$ et $\mathcal{D}_2 = (2, 1)$. La liste $\overline{\mathcal{D}}_n$ est la liste \mathcal{D}_n lue du dernier élément au premier. On définit aussi $(\mathcal{D}_n)^{(i)} = \mathcal{D}_n$ si i est pair et $(\mathcal{D}_n)^{(i)} = \overline{\mathcal{D}}_n$ si i est impair.

I.3.3 Permutations ayant un nombre donné de cycles

Pour $1 \leq k \leq n$, on désigne par $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de taille n admettant une décomposition en produit de k cycles disjoints. Naturellement, $\{S_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n}$ est une partition de S_n . La cardinalité de $S_{n,k}$ est donnée par les nombres de Stirling signés de première espèce $s(n, k)$ définis par :

$$s(n, k) = (n-1) \cdot s(n-1, k) + s(n-1, k-1) \quad (\text{I.9})$$

avec la condition initiale $s(n, k) = 0$ si $n \leq 0$ ou $k \leq 0$, $(n, k) \neq (0, 0)$, et $s(0, 0) = 1$. Voir par exemple [165, 179].

Pour $n, k \geq 1$ on définit par $S'_{n,k}$ l'ensemble des permutations de taille n avec k cycles et telles que n est un point fixe (i.e. $\sigma(n) = n$) et $S''_{n,k} = S_{n,k} \setminus S'_{n,k}$ son complément dans $S_{n,k}$.

Les fonctions ϕ_n et ψ_n définies ci-dessous induisent deux bijections entre $S_{n-1, k-1}$ et $S'_{n,k}$, puis entre $[n-1] \times S_{n-1, k}$ et $S''_{n,k}$.

Définition I.20. 1. Pour $1 \leq k < n$, un entier $i \in [n-1]$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1, k}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \psi_n(i, \gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} \gamma(i) & \text{si } j = n \\ n & \text{si } j = i \\ \gamma(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour $n \geq k \geq 2$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1, k-1}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \phi_n(\gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} n & \text{si } j = n \\ \gamma(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons qu'avec i et γ comme ci-dessus, il est facile de voir que :

- si $\gamma \in S_{n-1, k}$, $\psi_n(i, \gamma) \in S''_{n,k}$ et $\psi_n : [n-1] \times S_{n-1, k} \rightarrow S''_{n,k}$ est une bijection ; et
- si $\gamma \in S_{n-1, k-1}$, $\phi_n(\gamma) \in S'_{n,k}$ et $\phi_n : S_{n-1, k-1} \rightarrow S'_{n,k}$ est une bijection.

Lemme I.21. Soit γ une permutation de taille $n-1$, si $n \geq 3$ et $1 \leq i, j \leq n-1$, $i \neq j$ alors $\psi(i, \gamma) = \psi(j, \gamma) \cdot \langle i, j, n \rangle$.

Lemme I.22. Soit γ et σ deux permutations de taille $n-1$ vérifiant $\sigma = \gamma \cdot \langle i, j, k \rangle$ avec i, j, k deux à deux différents, $1 \leq i, j, k \leq n-1$, $n \geq 3$ alors $\psi(j, \sigma) = \psi(k, \gamma) \cdot \langle i, j, k \rangle$.

Lemme I.23. Soit γ une permutation de taille $n-1$ et $\sigma = \gamma \cdot \langle i, j \rangle$ avec $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n-1$, $n \geq 3$ alors $\psi(i, \sigma) = \phi(\gamma) \cdot \langle i, n, j \rangle$.

L'ensemble $S_{n,k}$ peut alors s'écrire :

$$S_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \psi(i, S_{n-1, k}) \cup \phi(S_{n-1, k-1}) \quad (\text{I.10})$$

avec $\phi(S_{n,0})$ et $\psi(i, S_{n, n+1})$ vides.

On définit alors la liste $\mathcal{S}_{n,k}$ en distinguant les cinq cas ci-dessous. Comme dans le paragraphe précédent, la liste $\mathcal{S}_{n,k}^{(i)}$ correspond à la liste $\mathcal{S}_{n,k}$ si i est pair et à $\overline{\mathcal{S}_{n,k}}$ si i est impair.

- * $\boxed{k = 1, n \geq 1}$ Pour $n \geq 1$, on définit :
- $$\mathcal{S}_{n,1} = \begin{cases} (1) & \text{si } n = 1 \\ (2, 1) & \text{si } n = 2 \\ (3, 1, 2), (2, 3, 1) & \text{si } n = 3 \\ \psi(1, \mathcal{S}_{3,1}) \circ \psi(2, \overline{\mathcal{S}_{3,1}}) \circ \psi(3, \overline{\mathcal{S}_{3,1}}) & \text{si } n = 4 \\ \psi(1, \mathcal{S}_{n-1,1}) \circ \bigcirc_{i=n-1}^4 \psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})^{(i+1)} \circ \psi(2, \mathcal{S}_{n-1,1}) \circ \psi(3, \overline{\mathcal{S}_{n-1,1}}) & \text{si } n \geq 5. \end{cases} \quad (a)$$
- * $\boxed{k = n, n \geq 2}$ $\mathcal{S}_{n,n}$ contient un seul élément $(1, 2, \dots, n-1, n)$ pour $n \geq 2$, (b)
- * $\boxed{k = n-1, n \geq 3}$ Pour $n \geq 3$, on définit $\mathcal{S}_{n,n-1} =$
- $$\begin{cases} \psi(1, \mathcal{S}_{2,2}) \circ \psi(2, \mathcal{S}_{2,2}) \circ \phi(\mathcal{S}_{2,1}) & \text{si } n = 3 \\ \psi(1, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ \bigcirc_{\substack{i=n-1 \\ i \neq n-2}}^2 \psi(i, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ \psi(n-2, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ \phi(\overline{\mathcal{S}_{n-1,n-2}}) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (c)$$
- * $\boxed{k = n-2, n \geq 4}$ Pour $n \geq 4$, on définit
- $$\mathcal{S}_{n,n-2} = \psi(1, \mathcal{S}_{n-1,n-2}) \circ \bigcirc_{i=3}^{n-1} \psi(i, \mathcal{S}_{n-1,n-2})^{(i)} \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,n-3}) \circ \psi(2, \overline{\mathcal{S}_{n-1,n-2}}). \quad (d)$$
- * $\boxed{2 \leq k \leq n-3}$ Pour $2 \leq k \leq n-3$, on définit
- $$\mathcal{S}_{n,k} = \psi(1, \mathcal{S}_{n-1,k}) \circ \bigcirc_{i=n-1}^{k+1} \psi(i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(i)} \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})^{(k)} \circ \bigcirc_{i=k}^2 \psi(i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(i-1)}. \quad (e)$$

Théorème I.24. *Les listes $\mathcal{S}_{n,k}$ et $\mathcal{S}_{n,k}^{-1}$ sont des codes de Gray optimaux et cycliques. Une permutation est obtenue à partir de sa précédente en effectuant un produit par un cycle de taille 3.*

TABLE I.4 : Les listes $\mathcal{S}_{3,k}$, $1 \leq k \leq 3$, et $\mathcal{S}_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$. Par exemple, dans $\mathcal{S}_{4,2}$ les sous-listes de la relation (d), $\psi(1, \mathcal{S}_{3,2})$, $\psi(3, \mathcal{S}_{3,2})$, $\phi(\mathcal{S}_{3,1})$ et $\psi(2, \mathcal{S}_{3,2})$, sont alternativement en gras et italique.

$\mathcal{S}_{3,1}$	$\mathcal{S}_{3,2}$	$\mathcal{S}_{3,3}$	$\mathcal{S}_{4,1}$	$\mathcal{S}_{4,2}$	$\mathcal{S}_{4,3}$	$\mathcal{S}_{4,4}$
1 312	1 321	1 123	1 4123	1 4213	1 4231	1 1234
2 <i>231</i>	2 <i>132</i>		2 4312	2 4321	2 <i>1243</i>	
	3 213		3 <i>2413</i>	3 4132	3 1432	
			4 <i>3421</i>	4 <i>2143</i>	4 <i>2134</i>	
			5 2341	5 <i>1342</i>	5 <i>1324</i>	
			6 3142	6 <i>3241</i>	6 <i>3214</i>	
				7 3124		
				8 2314		
				9 <i>2431</i>		
				10 <i>1423</i>		
				11 <i>3412</i>		

Toute permutation $\pi \in \mathcal{S}_n$ a une unique décomposition comme un produit de transpo-

sitions de la forme :

$$\pi = \langle p_1, 1 \rangle \cdot \langle p_2, 2 \rangle \cdot \langle p_3, 3 \rangle \cdot \dots \cdot \langle p_n, n \rangle = \prod_{i=1}^n \langle p_i, i \rangle \quad (\text{I.11})$$

avec $1 \leq p_i \leq i$. Donc (I.11) fournit une bijection $S_n \longrightarrow T_n$ avec $T_n = [1] \times [2] \times \dots \times [n]$; de plus un mot $p_1 p_2 p_3 \dots p_n \in T_n$ est une autre façon de représenter une permutation : on appellera cette représentation *tableau des transpositions*. D'un autre côté, un mot $p_1 p_2 p_3 \dots p_n \in T_n$ peut être vu comme la *table d'inversions* de la permutation $\sigma \in S_n$: $p_i - 1$ est le nombre d'entrées $\sigma_j > \sigma_i$, $j < i$.

La relation entre ces deux représentations n'a jamais été étudiée et est peut être une direction de recherche intéressante.

Soit maintenant l'ensemble $T_{n,k}$ des mots dans T_n avec exactement k points fixes, c'est-à-dire k entrées p_i telles que $p_i = i$. Puisque le nombre de 'transpositions' $\langle i, i \rangle$ dans (I.11) est aussi le nombre de cycles dans π , $T_{n,k}$ est l'ensemble des tableaux de transpositions des permutations dans $S_{n,k}$; la relation (I.11) induit une bijection $S_{n,k} \longrightarrow T_{n,k}$.

D'un autre côté, $T_{n,k}$ est l'ensemble des tables d'inversions des permutations dans S_n ayant k *minima gauche-droite* (en anglais *left-to-right minima*); un minimum gauche-droite dans une permutation est une entrée plus petite que toutes les entrées à sa gauche. Par conséquent, on obtient le résultat bien connu d'énumération : le nombre de permutations dans S_n avec k minima gauche-droite est aussi le nombre de Stirling signé $s(n, k)$. Voir également [165].

En général, une bijection entre deux ensembles ne conserve pas les petites modifications entre les objets; C'est le cas de la bijection $S_n \longrightarrow T_n$ définie précédemment. Par exemple, si π et π' sont deux permutations telles que $\pi' = \pi \cdot \langle a, b, c \rangle$ alors la décomposition de π' peut différer de celle de π par beaucoup de transpositions : Prendre $\pi = (7, 1, 2, 3, 4, 5, 6) = \langle 1, 1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 1, 3 \rangle \cdot \langle 1, 4 \rangle \cdot \langle 1, 5 \rangle \cdot \langle 1, 6 \rangle \cdot \langle 1, 7 \rangle$ et $\pi' = (2, 1, 4, 3, 7, 5, 6) = \pi \cdot \langle 1, 3, 5 \rangle = \langle 1, 1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 3, 3 \rangle \cdot \langle 3, 4 \rangle \cdot \langle 5, 5 \rangle \cdot \langle 5, 6 \rangle \cdot \langle 5, 7 \rangle$. Réciproquement, si deux décompositions diffèrent par au plus deux transpositions, alors les permutations correspondantes peuvent différer par beaucoup d'entrées : prendre $\pi = (2, 3, 4, 5, 6, 1) = \langle 1, 1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 3, 4 \rangle \cdot \langle 4, 5 \rangle \cdot \langle 5, 6 \rangle$ et $\pi' = (2, 4, 1, 6, 3, 5) = \langle 1, 1 \rangle \cdot \langle 1, 2 \rangle \cdot \langle 2, 3 \rangle \cdot \langle 2, 4 \rangle \cdot \langle 4, 5 \rangle \cdot \langle 4, 6 \rangle$.

Soit maintenant la liste $\mathcal{T}_{n,k}$ pour l'ensemble $T_{n,k}$, obtenue en remplaçant chaque permutation de la liste $\mathcal{S}_{n,k}$ par son tableau de transpositions. De façon surprenante, deux suites consécutives dans $\mathcal{T}_{n,k}$ diffèrent en au plus deux positions et donc c'est un code de Gray code (voir la table 2). Ce résultat est présenté dans le prochain théorème. Malgré la ressemblance avec le théorème I.24, ces deux théorèmes ne sont pas conséquences l'un de l'autre.

Théorème I.25. – $\mathcal{T}_{n,k}$ est à la fois un code de Gray pour l'ensemble des permutations de taille n avec k cycles dans leur représentation en tableau de transposition, et pour l'ensemble des permutations de taille n avec k minimum gauche-droite dans leur représentation en table d'inversion.

– $\mathcal{T}_{n,k}$ est partitionnée selon les suffixes et satisfait les desiderata de Walsh : la liste peut donc être obtenue en une complexité *loopless*. [175].

Il est important de noter que si on considère la liste des permutations ayant pour tableau d'inversions $\mathcal{T}_{n,k}$, on n'obtient pas un code de Gray pour les permutations ayant un nombre

TABLE I.5 : Les listes $\mathcal{S}_{4,2}$ et $\mathcal{T}_{4,2}$. Chaque suite dans $\mathcal{T}_{4,2}$ est le tableau de transpositions de la permutation correspondante dans $\mathcal{S}_{4,2}$.

$\mathcal{S}_{4,2}$	$\mathcal{T}_{4,2}$
4213	1211
4321	1221
4132	1131
2143	1133
1342	1223
3241	1213
3124	1114
2314	1124
2431	1132
1423	1222
3412	1212

donné de minima gauche-droite. De façon récursive, et en utilisant les définitions (a), (b), (c), (d) et (e) on obtient naturellement un algorithme CAT pour la génération pour $\mathcal{S}_{n,k}$.

Le paragraphe suivant présente alors une construction ad-hoc permettant d'obtenir un code de Gray optimal pour cet ensemble.

I.3.4 Permutations ayant un nombre donné de minima gauche-droite

Soit $\sigma \in S_n$; alors σ_i est un minimum gauche-droite si $\sigma_i < \sigma_j$ pour tout $j < i$. Pour $1 \leq k \leq n$, on note $S_{n,k}$ l'ensemble des permutations de taille n avec exactement k minima gauche-droite. Par exemple, on a $S_{3,1} = \{123, 132\}$, $S_{3,2} = \{213, 231, 312\}$ et $S_{3,3} = \{321\}$. Naturellement, $\{S_{n,k}\}_{1 \leq k \leq n}$ forme une partition pour S_n et il est bien connu (voir par exemple [165], p. 20) que la cardinalité de $S_{n,k}$ est donnée par les nombres de Stirling signés de première espèce $s(n, k)$ définis dans le paragraphe précédent puisqu'ils énumèrent aussi les permutations de taille n ayant k cycles [165, 179]. C'est la raison pour laquelle on conserve la notation $S_{n,k}$ dans ce paragraphe.

Les fonctions ϕ_n et ψ_n définies dans le paragraphe précédent induisent une bijection entre $S_{n-1,k-1} \cup [n-1] \times S_{n-1,k}$ et $S_{n,k}$ telle que sa restriction à $S_{n-1,k-1}$ est ϕ_n et sa restriction à $[n-1] \times S_{n-1,k}$ est ψ_n .

Définition I.26. 1. Pour $1 \leq k < n$, un entier $i \in [n-1]$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1,k}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \psi_n(i, \gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} \gamma(j) & \text{si } j \leq i \\ n & \text{si } j = i + 1 \\ \gamma(j-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour $n \geq k \geq 2$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1,k-1}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \phi_n(\gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} n & \text{si } j = 1 \\ \gamma(j-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'un autre coté, on a une autre bijection entre $S_{n-1,k-1} \cup [n] \setminus \{1\} \times S_{n-1,k}$ et $S_{n,k}$ en remplaçant ϕ_n et ψ_n avec les deux fonctions ϕ'_n et ψ'_n données ci-dessous.

Définition I.27. 1. Pour $1 \leq k < n$, un entier $i \in [n] \setminus \{1\}$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1,k}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \psi'_n(i, \gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} \gamma(j) & \text{si } \gamma(j) \leq i-1 \\ i & \text{si } j = n \\ \gamma(j) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Pour $n \geq k \geq 2$ et une permutation $\gamma \in S_{n-1,k-1}$, on définit une permutation de taille n , $\sigma = \phi'_n(\gamma)$ par

$$\sigma(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j = n \\ \gamma(j) + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lemme I.28. Soit γ une permutation de taille $n-1$, si $n \geq 3$ et $1 \leq i \leq n-2$, alors $\psi(i, \gamma) = \psi(i+1, \gamma) \cdot \langle i+1, i+2 \rangle$.

Lemme I.29. Soit γ une permutation de taille $n-1$, si $n \geq 3$ et $1 \leq i \leq n-3$, alors $\psi(i, \gamma) = \psi(i+2, \gamma) \cdot \langle i+1, i+3, i+2 \rangle$.

Ces deux lemmes peuvent aussi s'écrire avec ψ' :

Lemme I.30. Soit γ une permutation de taille $n-1$, si $n \geq 3$ et $2 \leq i \leq n-1$, alors $\psi'(i, \gamma) = \langle i, i+1 \rangle \cdot \psi'(i+1, \gamma)$.

Lemme I.31. Soit γ une permutation de taille $n-1$, si $n \geq 3$ et $2 \leq i \leq n-2$, alors $\psi'(i, \gamma) = \langle i, i+1, i+2 \rangle \cdot \psi'(i+2, \gamma)$.

L'ensemble $S_{n,k}$ peut s'écrire :

$$S_{n,k} = \bigcup_{i=1}^{n-1} \psi(i, S_{n-1,k}) \cup \phi(S_{n-1,k-1}) \quad (\text{I.12})$$

avec $\phi(S_{n,0})$ et $\psi(i, S_{n,n+1})$ vides. Si on considère maintenant ϕ' et ψ' , la relation devient

$$S_{n,k} = \bigcup_{i=2}^n \psi'(i, S_{n-1,k}) \cup \phi'(S_{n-1,k-1}). \quad (\text{I.13})$$

On définit alors la liste $\mathcal{S}_{n,k}$ en considérant les cinq cas suivants. On donne également une représentation de la liste en montrant l'enchaînement des différentes sous-listes qui la composent.

* $\boxed{k = n, n \geq 1}$ $\mathcal{S}_{n,n}$, $n \geq 1$, contient un seul élément $(n, n-1, \dots, 2, 1)$, (a)

* $\boxed{k = 1, n \geq 2}$ Pour $n \geq 2$, on définit les relations (b) :

• Pour $n = 2$, $\mathcal{S}_{n,1} = (1, 2)$.

• Pour $n = 2m \geq 2$,

$$\mathcal{S}_{n,1} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,1}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,1})^{(m+i-1)} \circ$$

$$\bigcirc_{i=1}^{m-1} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,1})^{(m+i)}.$$

• Pour $n = 2m + 1 \geq 3$,

$$\mathcal{S}_{n,1} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,1}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,1})^{(m+i)} \circ$$

$$\bigcirc_{i=1}^m \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,1})^{(m-1+i)}.$$



FIGURE I.6 : Les relations (b) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point i correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})$ et chaque point encercle i représente la liste $\overline{\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})}$, *i.e.*, la liste $\overline{\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})}$ dans l'ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,1} = \overline{\psi(7, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(5, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(3, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(1, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(2, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(4, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \overline{\psi(6, \mathcal{S}_{7,1})}$.

* $\boxed{k = n-1, n \geq 3}$ On définit les relations (c) (voir figure I.7),

• Pour $n = 2m \geq 4$,

$$\mathcal{S}_{n,n-1} = \psi'(n, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ \phi'(\mathcal{S}_{n-1,n-2}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi'(2i, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ$$

$$\bigcirc_{i=2}^m \psi'(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,n-1}).$$

• Pour $n = 2m + 1 \geq 3$,

$$\mathcal{S}_{n,n-1} = \psi'(n, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ \phi'(\mathcal{S}_{n-1,n-2}) \circ \bigcirc_{i=m}^2 \psi'(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,n-1}) \circ$$

$$\bigcirc_{i=1}^m \psi'(2i, \mathcal{S}_{n-1,n-1}).$$

Notons que ces relations utilisent ψ' et ϕ' au lieu de ψ et ϕ .



FIGURE I.7 : Les relations (c) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi'(i, \mathcal{S}_{n-1,n-1})$ et le point 0 représente la liste $\phi'(\mathcal{S}_{n-1,n-2})$. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,7} = \psi'(8, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \phi'(\mathcal{S}_{7,6}) \circ \psi'(6, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(4, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(2, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(3, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(5, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(7, \mathcal{S}_{7,7})$.

* $\boxed{k = n-2, n \geq 4}$ On définit les relations (d) (voir figure I.8),

- Pour $n = 2m \geq 4$,

$$\mathcal{S}_{n,n-2} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,n-2}) \circ \overline{\phi(\mathcal{S}_{n-1,n-3})} \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,n-2})^{(m+i-1)} \\ \circ \bigcirc_{i=1}^{m-1} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,n-2})^{(m+i)}.$$

- Pour $n = 2m + 1 \geq 5$,

$$\mathcal{S}_{n,n-2} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,n-2}) \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,n-3}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,n-2})^{(m+i)} \circ \bigcirc_{i=1}^m \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,n-2})^{(m+1+i)}.$$

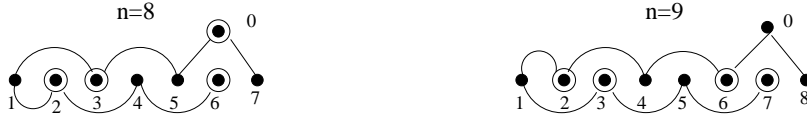


FIGURE I.8 : Les relations (d) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,n-2})$ et le point 0 est la liste $\phi(\mathcal{S}_{n-1,n-3})$. Quand le point est encadré, on considère la liste en ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,6} = \psi(7, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\phi(\mathcal{S}_{7,5})} \circ \psi(5, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\psi(3, \mathcal{S}_{7,6})} \circ \psi(1, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\psi(2, \mathcal{S}_{7,6})} \circ \psi(4, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\psi(6, \mathcal{S}_{7,6})}$.

* $\boxed{2 \leq k \leq n-3}$ Si $2 \leq k \leq n-3$, on définit les relations (e) (voir figure I.9)

- Pour $n = 2m$, k impair,

$$\mathcal{S}_{n,k} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,k}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i)} \circ \bigcirc_{i=1}^{(k-1)/2} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i+1)} \\ \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})^{m+(k-1)/2} \circ \bigcirc_{i=(k+1)/2}^{m-1} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k-1})^{(m+i)}.$$

- Pour $n = 2m$, k pair,

$$\mathcal{S}_{n,k} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,k}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^{(k+2)/2} \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i)} \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})^{m+\frac{k}{2}} \\ \circ \bigcirc_{i=k/2}^1 \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i-1)} \circ \bigcirc_{i=1}^{m-1} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k-1})^{(m+i)}.$$

- Pour $n = 2m + 1$, k impair,

$$\mathcal{S}_{n,k} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,k}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^{(k+1)/2} \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i-1)} \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})^{m+\frac{k+1}{2}} \\ \circ \bigcirc_{i=(k-1)/2}^1 \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i)} \circ \bigcirc_{i=1}^m \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k-1})^{(m+i+1)}.$$

- Pour $n = 2m + 1$, k pair,

$$\mathcal{S}_{n,k} = \psi(n-1, \mathcal{S}_{n-1,k}) \circ \bigcirc_{i=m-1}^1 \psi(2i, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i-1)} \circ \bigcirc_{i=1}^{(k-1)/2} \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k})^{(m+i)} \\ \circ \phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})^{m+(k+1)/2} \circ \bigcirc_{i=(k+1)/2}^m \psi(2i-1, \mathcal{S}_{n-1,k-1})^{(m+i+1)}.$$

Théorème I.32. La famille de listes $\{\mathcal{S}_{n,k}\}_{n \geq k \geq 1}$ est un code de Gray optimal.

La démonstration se fait par récurrence et consiste à examiner toutes les transitions entre les sous-listes dans les relations (a)-(e).

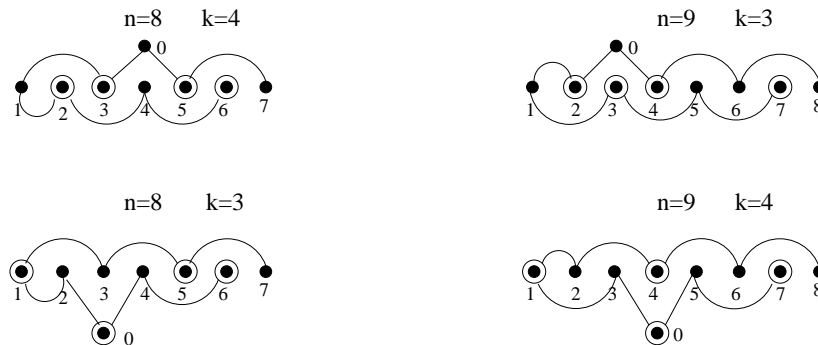


FIGURE I.9 : Les relations (e) pour $n = 8, 9$ et $k = 3, 4$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,k})$ et le point 0 est la liste $\phi(\mathcal{S}_{n-1,k-1})$. Quand le point est encadré, on considère la liste en ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ et $k = 4$ alors $\mathcal{S}_{8,4} = \psi(7, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \psi(5, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \phi(\mathcal{S}_{7,3}) \circ \psi(3, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \psi(1, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \psi(2, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \psi(4, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \psi(6, \mathcal{S}_{7,4})$.

TABLE I.6 : Les listes $\mathcal{S}_{3,k}$, $1 \leq k \leq 3$, et $\mathcal{S}_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$. Par exemple, dans $\mathcal{S}_{4,2}$ les sous-listes de la relation (d), $\psi(3, \mathcal{S}_{3,2})$, $\phi(\mathcal{S}_{3,1})$, $\psi(1, \mathcal{S}_{3,2})$, et $\psi(2, \mathcal{S}_{3,2})$, sont alternativement en gras et en italique.

$\mathcal{S}_{3,1}$	$\mathcal{S}_{3,2}$	$\mathcal{S}_{3,3}$	$\mathcal{S}_{4,1}$	$\mathcal{S}_{4,2}$	$\mathcal{S}_{4,3}$	$\mathcal{S}_{4,4}$
1 123	1 213	1 321	1 1234	1 2134	1 3214	1 4321
2 <i>132</i>	2 <i>231</i>		2 1324	2 2314	2 <i>3241</i>	
	3 312		3 <i>1423</i>	3 3124	3 <i>3421</i>	
			4 <i>1432</i>	4 <i>4132</i>	4 <i>4231</i>	
			5 1342	5 <i>4123</i>	5 4312	
			6 1243	6 2413	6 <i>4213</i>	
				7 2431		
				8 3412		
				9 <i>3142</i>		
				10 <i>2341</i>		
				11 <i>2143</i>		

Etant donné que l'on a utilisé une définition récursive du code de Gray, l'implantation d'un algorithme CAT pour l'obtention de cette liste s'obtient naturellement. Une applet java est disponible sur le site <http://www.u-bourgogne.fr/jl.baril>.

I.3.5 Permutations évitant un ensemble de motifs

Dans ce paragraphe on donne une construction de codes de Gray unifiée pour un grand nombre de classes de permutations évitant un ensemble de motifs.

Soit $\sigma \in S_n$; les *sites* de σ sont les positions entre deux entrées consécutives, avant la première entrée et après la dernière. On suppose que les sites sont numérotés de la droite vers la gauche de 1 à $n + 1$. Par exemple, le troisième site de la permutation $\sigma = 463512$ est entre 5 et 1. De plus, soit $\sigma \in S_n(T)$, où T est un ensemble de motifs à exclure, on dira que le i -ième site de σ est *actif* si la permutation γ obtenue à partir de σ en insérant $(n+1)$ sur ce site appartient à $S_{n+1}(T)$. On notera cette permutation γ par $\phi(i, \sigma)$ et nous dirons que γ est un *successeur* (ou *fil*) de σ . Les sites actifs d'une permutation $\sigma \in S_n(T)$ sont *resserrés à droite* (voir [67]) si tous les sites à droite du site actif le plus à gauche sont aussi

actifs. On note par $\chi_T(i, \sigma)$ le nombre de sites actifs de $\phi(i, \sigma)$. Un ensemble de motifs T est appelé *régulier* [67] si pour tout $n \geq 1$ et $\gamma \in S_n(T)$,

- γ a au moins deux sites actifs, et les sites actifs de γ sont resserrés à droite,
- il existe $\sigma \in S_{n-1}(T)$ et un entier i , $1 \leq i \leq n$, tel que $\gamma = \phi(i, \sigma)$,
- $\chi_T(i, \sigma)$ ne dépend pas de σ mais seulement du nombre k de sites actifs de σ ; dans ce cas, on note $\chi_T(i, \sigma)$ par $\chi_T(i, k)$ si σ a k sites actifs.

Pour la suite de ce paragraphe, on ne considère que des ensembles de motifs T réguliers.

Maintenant, pour chaque $n \geq 1$ et pour chaque permutation $\sigma \in S_n(T)$, on associe :

- une *direction* : *haut* ou *bas*; une permutation σ avec la direction *haut* (*bas* respectivement) sera notée par σ^1 (σ^0 respectivement). Une telle permutation sera appelée permutation *orientée*.
- Une liste de ses successeurs considérés avec leur directions, *i.e.* une liste contenant des $\phi(i, \sigma)^j$ où $j \in \{0, 1\}$ et les indices i sont les sites actifs de σ dans un ordre que l'on va expliciter ci-dessous.

La liste des successeurs de σ^0 sera obtenue en renversant l'ordre de la liste des successeurs de σ^1 et en inversant la direction de chaque élément de la liste.

Soit σ^1 une permutation orientée dans $S_n(T)$ avec k sites actifs et soit L la suite unimodale d'entiers où $L(i)$ est le i -ième ($1 \leq i \leq k$) entier de la suite L suivante :

$$L = \begin{cases} 3, 5, \dots, (k-3), (k-1), k, (k-2), (k-4), \dots, 4, 2, 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 3, 5, \dots, (k-4), (k-2), k, (k-1), (k-3), \dots, 4, 2, 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

On considère aussi la suite L' définie par :

$$L' = \begin{cases} 2, 4, \dots, (k-4), (k-2), k, (k-1), (k-3), \dots, 5, 3, 1 & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 2, 4, \dots, (k-3), (k-1), k, (k-2), (k-4), \dots, 5, 3, 1 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

Soit $\Pi(\sigma^1)$ la liste des successeurs de σ^1 contenant les k permutations orientées dans $S_{n+1}(T)$ telle que : le j -ième élément est $\phi(L(j), \sigma)^{(i-1) \bmod 2}$ pour $1 \leq j \leq k-1$ et le k -ième élément est $\phi(L(k), \sigma)^1$. De plus, si on remplace la suite L par L' dans cette définition, on obtient une liste notée $\Pi'(\sigma^1)$. Les figures I.10 et I.11 illustrent les différents cas pour les listes $\Pi(\sigma)$ et $\Pi'(\sigma)$ lorsque σ possède $k = 7$ ou $k = 8$ sites actifs.



FIGURE I.10 : Si $k = 7$ alors $\Pi(\sigma^1)$ est la liste $\phi(3, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(6, \sigma)^1, \phi(4, \sigma)^0, \phi(2, \sigma)^1, \phi(1, \sigma)^1$; si $k = 8$, $\Pi(\sigma^1)$ est $\phi(3, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(8, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(2, \sigma)^0, \phi(1, \sigma)^1$. Chaque point (resp. point encerclé) étiqueté par $\ell \in [1..k]$ représente $\phi(\ell, \sigma)^1$ (resp. $\phi(\ell, \sigma)^0$).



FIGURE I.11 : Si $k = 7$ alors $\Pi'(\sigma^1)$ est la liste $\phi(2, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(7, \sigma)^1, \phi(5, \sigma)^0, \phi(3, \sigma)^1, \phi(1, \sigma)^1$; si $k = 8$, $\Pi'(\sigma^1)$ est $\phi(2, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(8, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(3, \sigma)^0, \phi(1, \sigma)^1$. Chaque point (resp. point encerclé) étiqueté par $\ell \in [1..k]$ représente $\phi(\ell, \sigma)^1$ (resp. $\phi(\ell, \sigma)^0$).

Posons $d_n = \text{card}(S_n(T))$. On définit alors récursivement le code de Gray $\mathcal{S}_n(T)$ pour l'ensemble $S_n(T)$:

$$\mathcal{S}_n(T) = \begin{cases} 1^0 & \text{si } n = 1 \\ \bigcirc_{i=1}^{d_{n-1}} \tilde{\Pi}(\sigma[i]) & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

- $\sigma[i]$ est la i -ième permutation orientée de la liste $\mathcal{S}_{n-1}(T)$,
- $\tilde{\Pi}(\sigma[i]) = \Pi'(\sigma[i])$ si : la direction de $\sigma[i]$ est 0 et la direction de $\sigma[i+1]$ est 1; $\sigma[i]$ et $\sigma[i+1]$ diffèrent en trois positions et ont respectivement au moins trois fils et exactement deux fils,
- $\tilde{\Pi}(\sigma[i]) = \Pi(\sigma[i])$ si : la direction de $\sigma[i]$ est 1 et la direction de $\sigma[i-1]$ est 0; $\sigma[i]$ et $\sigma[i-1]$ diffèrent de trois positions et ont respectivement au moins trois fils et exactement deux fils,
- $\tilde{\Pi}(\sigma[i]) = \Pi(\sigma[i])$ sinon.

La table I.7 illustre notre construction pour $\mathcal{S}_5(321)$ et $\mathcal{S}_5(312)$. Notons que les listes Π et Π' apparaissent dans la construction du code Gray $\mathcal{S}_5(321)$; mais seulement les listes de la forme Π sont utilisées pour $\mathcal{S}_5(312)$.

Maintenant nous étudions plusieurs propriétés qui vont nous permettre de prouver que cette définition induit presque toujours des codes de Gray tels que deux éléments consécutifs de la liste diffèrent en au plus trois positions. Si \mathcal{L} est une liste, on note par $\text{prem}(\mathcal{L})$ et $\text{der}(\mathcal{L})$ le premier et dernier élément de \mathcal{L} .

Proposition I.33. *Soit T un ensemble régulier de motifs. La liste $\mathcal{S}_n(T)$ contient exactement une et une seule fois chaque permutations de $S_n(T)$. Le premier élément de la liste est $123\dots(n-1)n$ et le dernier est $2134\dots(n-1)n$.*

Lemme I.34. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soit σ une permutation dans $\mathcal{S}_n(T)$, et soit $r \in \{0, 1\}$ sa direction, alors deux permutations successives dans $\Pi(\sigma^r)$ diffèrent en au plus trois positions.*

Lemme I.35. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^1 et γ^0 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$. Alors $d(\sigma, \gamma) = d(\text{der}(\Pi(\sigma^1)), \text{prem}(\Pi(\gamma^0)))$.*

Lemme I.36. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^0 et γ^1 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$. Si les deux permutations σ et γ ont au moins trois successeurs alors on a : $d(\sigma, \gamma) = d(\text{der}(\Pi(\sigma^0)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1)))$.*

Lemme I.37. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^0 et γ^1 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$. Si les deux permutations σ et γ ont deux successeurs, on a : $d(\sigma, \gamma) = d(\text{der}(\Pi(\sigma^0)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1)))$.*

Lemme I.38. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^0 et γ^1 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$ telles que $\sigma = \gamma \cdot \langle n-1, n \rangle$. Si σ a au moins trois fils et γ a deux fils alors on a : $d(\text{der}(\Pi(\sigma^0)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1))) = 3$.*

Lemme I.39. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^0 et γ^1 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$ telles que σ et γ diffèrent en trois positions. Si σ a deux fils (resp. au moins trois fils) et γ a au moins trois fils (resp. exactement deux fils), alors on a : $d(\text{der}(\Pi(\sigma^0)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1))) = 3$.*

Lemme I.40. *Soit T un ensemble régulier de motifs. Soient σ^1 et γ^1 deux permutations orientées consécutives dans la liste $\mathcal{S}_n(T)$ telles que $\sigma = \gamma \cdot \langle n-1, n \rangle$. Si γ a au moins trois fils, alors on a : $d(\text{der}(\Pi(\sigma^1)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1))) = 2$. D'un autre côté, si γ a deux fils alors on a : $d(\text{der}(\Pi(\sigma^1)), \text{prem}(\Pi(\gamma^1))) = 3$.*

Remarquons alors que :

- si $\chi_T(i, k) = 2$ pour tout i et k , alors la liste $\mathcal{S}_n(T)$ définie ci-dessus est un code de Gray cyclique pour $S_n(T)$ tel que deux éléments consécutifs dans la liste diffèrent sur deux positions. En effet, il suffit d'appliquer les lemmes I.34, I.35, et I.37.
- si $\chi_T(i, k) \geq 3$ pour tout i et k , alors la liste $\mathcal{S}_n(T)$ définie ci-dessus est un code de Gray cyclique pour $S_n(T)$. Deux éléments consécutifs dans la liste diffèrent sur au plus trois positions. Il suffit d'appliquer les lemmes I.34, I.35, I.36 et I.40.

Dans la table I.8, on donne plusieurs ensembles T de motifs pour lesquels on peut appliquer notre construction dans le but d'obtenir des codes de Gray pour $S_n(T)$. Notons que cette construction nous permet d'obtenir des codes de Gray optimaux pour $S_{2n+1}(321)$ et $S_{2n+1}(312)$, $n \geq 0$ (voir la table I.7). En effet, la différence entre le nombre de permutations paires et impaires dans $S_{2n+1}(321)$ (resp. $S_{2n+1}(312)$) est au moins deux (voir [160]). Donc nous ne pouvons pas avoir un code de Gray tel que deux permutations consécutives diffèrent par une transposition. Puisque la différence entre le nombre de permutations paires et impaires dans $S_{2n}(321)$ (resp. $S_{2n}(312)$) est zéro, nous ne pouvons pas déduire l'optimalité de notre code de Gray pour $S_{2n}(321)$ (resp. $S_{2n}(312)$) ainsi que pour d'autres classes. Le code de Gray pour $S_n(321, 312)$ est optimal et il correspond à celui trouvé dans [94] par une autre méthode.

I.4 Conclusion - perspectives

Ce chapitre expose mes travaux concernant la génération exhaustive d'une classe d'objets combinatoires. La plupart des résultats obtenus étudient la génération de classes de permutations particulières. Cependant, il reste plusieurs problèmes ouverts dans ce domaine. On peut se demander si les classes $S_{2n}(321)$ et $S_{2n}(312)$ admettent des codes de Gray tels que deux permutations successives diffèrent en au plus deux positions. On peut également se poser la question de l'existence d'un code de Gray pour la classe de permutations ayant un nombre donné de descentes ou de la classe des permutations ayant un nombre donné d'excédances. Il reste donc encore de nombreuses classes de permutations à explorer. Enfin, on peut aussi citer le problème du 'middle level' qui résiste encore à l'ensemble de la communauté. Il s'agit de trouver un code de Gray de l'ensemble des mots binaires de taille impaire $2n+1$ ayant n ou $n+1$ uns...

TABLE I.7 : Les codes de Gray optimaux pour $\mathcal{S}_5(312)$ et $\mathcal{S}_5(321)$. Deux éléments consécutifs diffèrent en au plus trois positions.

$\mathcal{S}_5(312)$			$\mathcal{S}_5(321)$		
12345	32145	24315	12345	13245	23145
12354	32154	24351	12354	13254	23154
12543	32541	25431	15234	13524	23514
12453	32451	24531	51234	13452	23451
12435	32415	23541	12534	13425	23415
14325	43215	23451	12453	34125	24135
14352	43251	23415	12435	34152	24153
15432	45321	23154	41235	34512	24513
14532	54321	23145	41253	31452	21453
13542	43521	21435	45123	31425	21435
13452	34521	21453	41523	31524	21534
13425	35421	21543	14523	35124	25134
13254	34251	21354	14253	31254	21354
13245	34215	21345	14235	31245	21345

TABLE I.8 : Classes de permutations évitant les motifs de T avec leur fonctions de succession $\chi_T(i, k)$. On donne aussi les différents lemmes utilisés pour la preuve du code de Gray. On compare aussi les nombres maximum des différences de position entre deux permutations consécutives dans [67] et dans notre code de Gray **B**. Un point dans la dernière colonne signifie qu'il n'y a pas de code de Gray connu pour cette classe dans la littérature.

Classes	T	$\chi_T(i, k)$	Lemmes	[67], B
2^{n-1} [11]	{321, 312}	2	<i>I.34, I.35, I.37</i>	3, 2
Catalan [176]	{312}	$i + 1$	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
	{321}	$k + 1$ si $i = 1$ i sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.39, I.40</i>	5, 3
Indice pair Fibonacci [11]	{321, 3412}	$k + 1$ si $i = 1$ 2 sinon	<i>I.34, I.35, I.37, I.38, I.40</i>	5, 3
	{321, 4123}	3 si $i = 1$ i sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.37, I.38, I.40</i>	5, 3
	{321, 4321}	3 si $i = 3$ & $k = 3$ $i + 1$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	., 3
Pell [11]	{321, 3412, 4123}	3 si $i = 1$ 2 sinon	<i>I.34, I.35, I.37, I.38, I.40</i>	5, 3
	{312, 4321, 3421}	3 si $i = 2$ 2 sinon	<i>I.34, I.35, I.37, I.38, I.40</i>	., 3
Schröder [85]	{4321, 4312}	$k + 1$ si $i = 1$ ou $i = 2$ i sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
	{4231, 4132}	$k + 1$ si $i = 1$ ou $i = k$ $i + 1$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
	{4123, 4213}	$k + 1$ si $k - 1 \leq i \leq k$ $i + 2$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
Coefficient binomial central [85]	{4321, 4231, 4312, 4132}	$k + 1$ si $i = 1$ 3 si $i = 2$ i sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
	{4231, 4132, 4213, 4123}	3 si $i = 1$ $i + 1$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3
Motifs généralisés [11, 54]	{321, $(p + 1)12 \dots p$ }	$k + 1$ si $i = 1$ & $k < p$ p si $i = 1$ & $k = p$ i sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.39, I.40</i>	5, 3
	{321, 3412, $(p + 1)12 \dots p$ }	$k + 1$ si $i = 1$ & $k < p$ p si $i = 1$ & $k = p$ 2 sinon	<i>I.34, I.35, I.37, I.38, I.40</i>	5, 3
Motzkin généralisé [10]	pour $p \geq 2$, {321, $(p + 2)\bar{1}(p + 3)2 \dots (p + 1)$ }	$k + 1$ si $i = 1$ i si $2 \leq i \leq p$ $i - 1$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.39, I.40</i>	., 3
Schröder généralisé [102]	$\cup_{\tau \in S_{n-1}} \{(p + 1)\tau p\}$	$k + 1$ si $k \leq p$ ou $p + i \geq k + 1$ $i + p - 1$ sinon	<i>I.34, I.35, I.36, I.38, I.40</i>	5, 3

Chapitre II

Etude de structures énumérées par les nombres de Catalan

II.1 Introduction

Un grand nombre de classes d'objets combinatoires sont énumérées par les nombres de Catalan. C'est par exemple le cas, parmi d'autres, des suites de ballot, des arbres binaires, mots ou chemins de Dyck, des tableaux de Young, des permutations triables avec une pile, des bons parenthésages, des permutations évitant un motif de longueur trois, triangulations,... Une liste de plus de soixante sortes de telles classes combinatoires sont répertoriées par Stanley dans [164].

D'un point de vue de la théorie des ordres, il existe des ordres partiels sur les ensembles de Catalan qui induisent une structure de treillis. Le plus connu est le treillis de Tamari qui peut être obtenu de façon équivalente de trois façons différentes. En effet, les recouvrements correspondent aux transformations élémentaires dans trois classes de Catalan : une 'reparenthésation' $(x(yz)) \rightarrow ((xy)z)$ [79], une rotation sur les arbres binaires [132, 161], et une bascule (flip en anglais) d'une diagonale dans les triangulations [88, 161]. Voir aussi la référence [127]. Ensuite il y a le treillis des partitions non-croisées [103] : le treillis de Kreweras. Deux partitions π et π' vérifient $\pi \leq \pi'$ si chaque bloc de π est un sous-ensemble d'un bloc de π' . Voir [68, 69, 137, 158] et de nombreuses autres références dans le survey [159]. Il y a aussi le treillis de Stanley qui opère sur les chemins de Dyck [164]. Plus récemment, un lien entre les mots de Dyck, les partitions non-croisées et les permutations évitant le motif 321 permet de définir une structure de treillis distributif sur ces ensembles de Catalan [8, 75].

Dans la deuxième partie de ce chapitre, on présente deux nouvelles structures en treillis sur des ensembles énumérés par les nombres de Catalan. La première consiste en un treillis sur les mots de Dyck, ou de façon équivalente sur les parenthésages bien formés ; le treillis "phagocyte" opère une mutation sur les parenthésages de la manière suivante : un sous-parenthésage $w((\dots(())\dots))$ est transformé en $((\dots((w))\dots))$. La seconde exhibe le treillis 'taille-greffe' (en anglais, pruning-grafting) sur les arbres binaires dont la trans-

formation élémentaire consiste à *tailler une cerise pour ensuite la greffer sur la branche immédiatement à gauche*.

Dans la troisième partie de ce chapitre, on étudie la distance de rotation entre deux arbres binaires. Le problème de déterminer en temps polynomial la taille du plus petit chemin entre deux arbres binaires situés dans le treillis de Tamari reste encore ouvert. On fournit ici un algorithme d'approximation de cette distance en temps polynomial.

II.2 Treillis de Catalan

II.2.1 Le treillis 'Phagocyte'

Soit D l'ensemble des mots de Dyck sur l'alphabet $\{(,)\}$. Il s'agit du langage généré par la grammaire $S \rightarrow \lambda|(S)|SS$, i.e. l'ensemble des mots constitués des bons parenthésages. Notons D_n l'ensemble des mots de Dyck avec n parenthèses ouvrantes et n fermantes. La cardinalité de D_n est le n -ième nombre de Catalan : $\text{card}(D_n) = (2n)!/(n!(n+1)!)$. Les parenthèses ouvrantes (resp. fermantes) de $w \in D_n$ sont numérotées de 1 à n en parcourant w de la gauche vers la droite.

Une partition $b_1/b_2/\dots/b_k$ de $[1, n] = \{1, 2, \dots, n\}$ en blocs b_i est dite non-croisée s'il n'existe pas quatre nombres $p < q < r < s$ tels que $p, r \in b_i$ et $q, s \in b_j$ avec $i \neq j$. Donc $146/23/5$ est une partition non-croisée de $[1, 6]$ (*ncp* en abrégé) alors que $135/2/46$ est croisée. Notons NC_n l'ensemble de tous les *ncp* de $[1, n]$. Nous avons $\text{card}(NC_n) = \text{card}(D_n)$. Une *ncp* sera écrite en listant les éléments dans chaque bloc en ordre croissant, et les blocs en ordre croissant de leur minima. Il y a différentes façons de représenter une *ncp*. Par exemple, dans une représentation linéaire, $[1..n]$ apparaît classiquement sur une droite réelle et des éléments successifs dans un même bloc sont joints par un arc dans le premier quadrant. Dans cette section, on utilisera la représentation canonique : soit une *ncp* $\pi \in NC_n$, on définit la relation R_π sur $[1..n]$ par $iR_\pi j$ si et seulement si i est le plus petit élément du bloc de π qui contient j ($i \leq j$). La représentation canonique de π est obtenue en traçant le graphe orienté de R_π sur le premier quadrant. Dans ces deux représentations, la propriété 'non-croisée' de la partition correspond au fait que les arcs ne s'intersectent jamais.

Puisque $\text{card}(D_n) = \text{card}(NC_n)$, il y a une bijection explicite entre D_n et NC_n [81, 82, 158, 159]. Soit une *ncp* $\pi \in NC_n$ et sa représentation canonique ; pour chaque élément visité $i \in [1, n]$ (pour i allant de 1 à n), on écrit r parenthèses ouvrantes ($r \geq 0$) si il y a r arcs commençant en i , puis on écrit une parenthèse fermante puisqu'il y a toujours exactement un seul arc finissant en i . La figure II.1 illustre cette bijection.

$$\begin{aligned} w &= (((()()))(())()) \\ \pi_w &= 149/23/57/6/8 \\ c_w &= (1, 2, 2, 1, 5, 6, 5, 8, 1) \end{aligned}$$

On note par π_w la *ncp* correspondante au mot de Dyck w . Remarquons alors que le nombre $nbl(\pi_w)$ de blocs de π_w est égal au nombre d'occurrences de $"()"$ dans w . Soit $w \in D_n$, on définit aussi le vecteur c_w ou $c_w[i]$ est le plus petit élément du bloc de π_w qui contient i ($1 \leq i \leq n$).

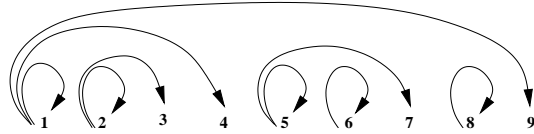


FIGURE II.1 : La représentation canonique du mot de Dyck $w \in D_9$

Dans la suite, la relation d'inclusion stricte (respectivement large) sera notée par le symbole \subset (respectivement \subseteq).

Définition II.1. La transformation 'phagocyte' \longrightarrow sur D_n est définie par $w \longrightarrow w'$ si on a : $w = u'v^{(n)}u''$ et $w' = u'(^n v)u''$, où v est un mot de Dyck non-vide, $n \geq 1$ et $u', u'' \in \{(\cdot)\}^*$. On note $\xrightarrow{*}$ la cloture réflexive et transitive de \longrightarrow .

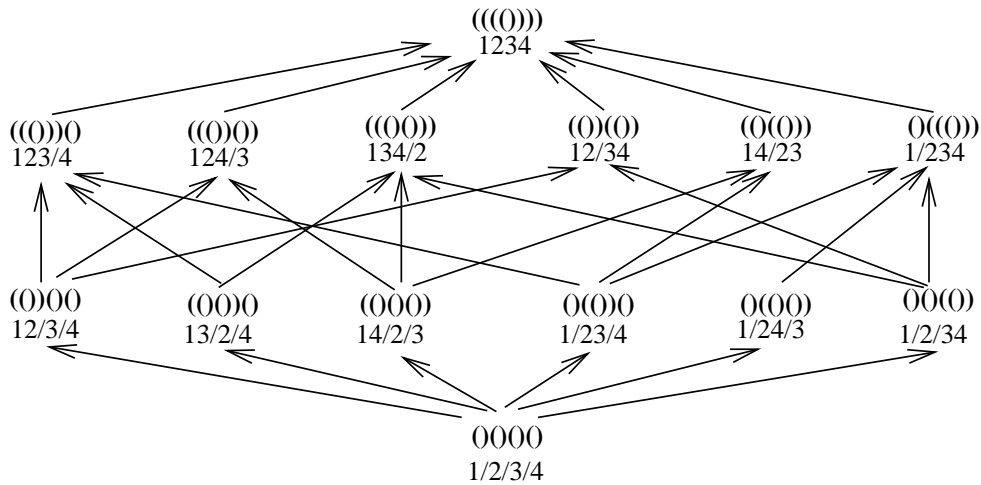


FIGURE II.2 : Le treillis phagocyte D_4 .

Lemme II.2. Pour tout $w, w' \in D_n$, on a $w \longrightarrow w'$ si et seulement si π_w et $\pi_{w'}$ vérifient :

- un bloc de $\pi_{w'}$ est l'union de deux blocs b_1 et b_2 de π_w où $\min(b_1) < \min(b_2)$ et $b_2 = [\min(b_2), \max(b_2)]$ est un intervalle,
- chaque bloc de π_w différent de b_1 et b_2 est aussi un bloc de $\pi_{w'}$.

Proposition II.3. $(D_n, \xrightarrow{*})$ est un ensemble partiellement ordonné avec un zéro $\mathbf{0} = () \dots ()$ et un $\mathbf{1} = ((\dots ()) \dots)$; il est gradué par la fonction de rang $r(w) = n - nbl(\pi_w)$.

Voir le diagramme de D_4 dans la figure II.2.

Théorème II.4. Pour tout $w, w' \in D_n$, on a $w \xrightarrow{*} w'$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (C1) chaque bloc de π_w est inclu dans un bloc de $\pi_{w'}$,

- (C2) pour tous blocs $b_1, b_2 \in \pi_w$, $b' \in \pi_{w'}$ tels que $b_1 \cup b_2 \subset b'$ et $\min(b_1) < \min(b_2)$ alors $[\min(b_2), \max(b_2)] \subset b'$.

Remarque : La condition (C1) est l'ordre bien connu sur les partitions [103, 159]. La condition (C2) signifie que tout bloc $b' \in \pi_{w'}$ est fait d'un bloc $b_i \in \pi_w$ et d'un ou plusieurs intervalles disjoints $[k, l]$ pour lesquels un bloc $b_j \in \pi_w$ ($j > i$) existe tel que $k = \min(b_j)$ et $l = \max(b_j)$.

◇

$$w = ((()())(())((())))$$

$$w_1 = (()((((()())(()))))$$

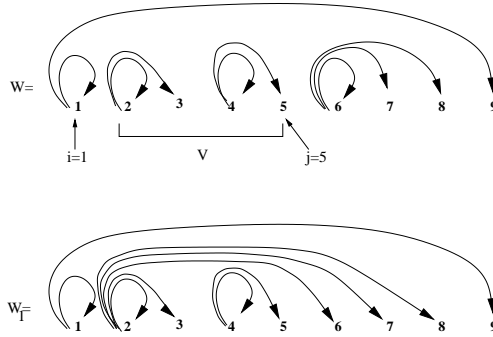


FIGURE II.3 : Une transformation 'phagocyte' $w \rightarrow w_1$; $\pi_w = 19/23/45/678$ et $\pi_{w_1} = 19/23678/45$.

Théorème II.5. Pour tout n , l'ensemble partiellement ordonné $(D_n, \xrightarrow{*})$ est un treillis.

Dans la proposition suivante, on énumère les éléments max-irréductibles et min-irréductibles de D_n . Rappelons que $x \in D_n$ est max-(resp. min)-irréductible si $x = a \vee b$ (resp. $x = a \wedge b$) implique $x = a$ ou $x = b$. En d'autres termes, les éléments max-(resp. min)-irréductibles sont ceux qui ont un unique prédécesseur (resp. successeur).

Proposition II.6. Le nombre d'éléments max-irréductibles dans le treillis 'phagocyte' D_n est $n(n-1)/2$.

Proposition II.7. Le nombre d'éléments min-irréductibles dans le treillis 'phagocyte' D_n est $2^{n-1} - 1$.

En utilisant le théorème II.4, on donne ici deux algorithmes pour calculer le min $w \wedge w'$ et le max $w \vee w'$ de deux mots de Dyck $w, w' \in D_n$.

Algorithm min :

```

for  $i := 1$  to  $n$  do  $c_{w \wedge w'}[i] := 0$  enddo
for  $i := 1$  to  $n$  do

```

```

if  $c_{w \wedge w'}[i] = 0$  then
  if  $c_w[i] < i$  or  $c_{w'}[i] < i$  then
     $j_0 := i$ ;
    for  $j := i$  to  $n$  do
      if  $c_{w \wedge w'}[j] = 0$  and  $c_w[j] = c_w[i]$  and  $c_{w'}[j] = c_{w'}[i]$  then
         $c_{w \wedge w'}[j] := j_0$ ;
      else  $j_0 := j$ ; endif
    enddo
  else
    for  $j := i$  to  $n$  do
      if  $c_w[j] = i$  and  $c_{w'}[j] = i$  then
         $c_{w \wedge w'}[j] := i$ ; endif
    enddo
  endif
endif
enddo

```

La complexité en espace est $O(n)$. La complexité en temps est $O(n^2)$.

On peut aussi définir un algorithme récursif pour calculer le max $\pi \sqcup \pi'$ de deux *nep* π et π' dans le treillis classique des partitions non-croisées. Donc on suppose que $c_{w \sqcup w'}$ est déjà calculé pour tout $w, w' \in D_n$. Supposons que c_w et $c_{w'}$ sont déterminés. Soit d_w (respectivement $d_{w'}$) le vecteur défini par $d_w[i]$ (respectivement $d_{w'}[i]$) comme étant le plus grand élément du bloc de π_w (respectivement $\pi_{w'}$) qui contient i .

Algorithm max.

```

for  $i := 1$  to  $n$  do
  if  $c_{w \vee w'}[i] = 0$  then
    for  $j := i$  to  $n$  do
      if  $c_{w \sqcup w'}[j] = c_{w \sqcup w'}[i]$  then
         $c_{w \vee w'}[j] := c_{w \sqcup w'}[i]$ ;
        if  $c_w[j] \neq c_w[i]$  then
          for  $k := j + 1$  to  $d_w[j]$  do
             $c_{w \vee w'}[k] := c_{w \sqcup w'}[i]$ ; enddo
          endif
        if  $c_{w'}[j] \neq c_{w'}[i]$  then
          for  $k := j + 1$  to  $d_{w'}[j]$  do
             $c_{w \vee w'}[k] := c_{w \sqcup w'}[i]$ ; enddo
          endif
        endif
      endif
    enddo
  endif
enddo

```

Par exemple, si $\pi_w = 149/23/57/6/8$ et $\pi_{w'} = 147/23/56/89$, les algorithmes donnent $\pi_{w \wedge w'} = 14/23/5/6/7/8/9$ et $\pi_{w \vee w'} = 1456789/23$.

En conclusion, nous avons défini une nouvelle structure sur les mots de Dyck (parenthésages).

La transformation $v() \rightarrow (v)$ définie dans [81] est un cas particulier de la transformation 'phagocyte'. Cependant, l'ensemble partiellement ordonné obtenu par cette transformation n'est pas un treillis. Il est toutefois semi-modulaire ce qui permet à Pallo et Germain de calculer la distance du plus court chemin [117].

Il reste à examiner plusieurs problèmes.

Est-ce qu'il existe un algorithme pour calculer la fonction de Möbius du treillis 'phagocyte' comme dans [131] ?

Des calculs expérimentaux montrent que le nombre de recouvrements $cov(n)$ de D_n est égal à $3(2n+2)!/((n+1)!(n+4)!)$ pour de petites valeurs de n ($n \leq 6$). Nous obtenons les premiers termes de la suite **A003517**=[1, 6, 27, 110, ...] trouvée dans *Sloane Encyclopedia* [162]. Peut-on prouver que c'est bien cette suite ? Est-ce qu'il existe un algorithme en temps polynomial pour calculer la distance minimale entre deux mots de Dyck dans le treillis 'phagocyte' [117] ? Si oui, une nouvelle distance du plus court chemin pourrait être obtenue et ajoutée aux distances déjà existantes sur les ensembles de Catalan [40, 81, 130, 124, 132, 128, 161].

II.2.2 La transformation de taille-greffe

Dans ce paragraphe, on définit une nouvelle transformation sur les arbres binaires qui peut être caractérisée à l'aide des suites de distribution. Cela induit une nouvelle structure de treillis sur B_n .

Un *arbre binaire* avec une racine, ordonné, est un arbre non étiqueté dans lequel tous les noeuds sont soit une feuille \square (i.e. un noeud sans fils) soit un noeud interne \circ ayant deux fils. On note par B_n l'ensemble des arbres binaires avec n noeuds internes (donc avec $n+1$ feuilles). Il est bien connu que $\text{card}(B_n) = |B_n|$ est égal au nombre de Catalan $\binom{2n}{n}/(n+1)$. L'ensemble B des arbres binaires est récursivement défini par $B = \square + \circ BB$ en notation polonaise. Il est bien connu qu'une suite de n cercles et $(n+1)$ carrés correspond à la notation polonaise d'un arbre de B_n si et seulement si dans tout préfixe propre de la suite, le nombre de cercles est plus grand ou égal au nombre de carrés, et le nombre total de carrés de la suite est exactement le nombre total de cercles plus un. Soit T_L et T_R les sous-arbres gauche et droit de $T \in B_n$. Alors on peut écrire $T = \circ T_L T_R$ et on définit l'arbre miroir $\bar{T} = \circ \bar{T}_R \bar{T}_L$. Les feuilles de l'arbre T sont numérotées en préordre transversal (i.e. de la gauche vers la droite). La *suite des profondeurs* de T est la suite d'entiers $\ell_T = (\ell_T(1), \ell_T(2), \dots, \ell_T(n+1))$ où $\ell_T(i)$ est le *niveau* de la i -ième feuille, i.e. la longueur de l'unique chemin entre la i -ième feuille et la racine [147]. Soit aussi $\bar{\ell}$ la suite miroir $\bar{\ell} = (\ell_T(n+1), \ell_T(n), \dots, \ell_T(1))$ laquelle est aussi la suite des profondeurs de l'arbre miroir \bar{T} récursivement défini par $\bar{T} = \circ \bar{T}_R \bar{T}_L$ et $\bar{\square} = \square$. Par exemple, l'arbre défini en notation polonaise par $\circ \square \circ \circ \square \circ \square \circ \square \square \circ \circ \square \square \square$ a la suite des profondeurs (1, 3, 4, 5, 5, 4, 4, 3). Son miroir est $\circ \circ \circ \square \circ \square \square \circ \circ \circ \square \square \square \square$ et a la suite des profondeurs (3, 4, 4, 5, 5, 4, 3, 1). Maintenant considérons une suite $(a(1), a(2), \dots, a(n+1))$ avec un entier $k \in [2, n+1]$ tel que $a(k-1) = a(k) = q$. Le processus qui consiste à remplacer la paire $(a(k-1), a(k)) = (q, q)$ par $q-1$ dans le but d'obtenir une nouvelle suite $(a(1), a(2), \dots, a(k-2), q-1, a(k+1), \dots, a(n+1))$ est appelé une *réduction*. Ruskey et Hu [147] donnent la condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite de taille $(n+1)$

représente un arbre binaire de B_n . Une suite $(a(1), a(2), \dots, a(n+1))$ est une suite des profondeurs si et seulement si une série de n réductions de la gauche vers la droite produit la suite 0.

De plus, la suite des profondeurs d'un arbre binaire obéit à ce qu'on appelle l'inégalité de Kraft ([80], p. 45). Une condition nécessaire [99, p. 404, ex. 3] pour une suite $(a(1), a(2), \dots, a(n+1))$ pour être une suite des profondeurs est que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} 2^{-a(i)} = 1.$$

Lemme II.8. [99, p. 404, ex. 3] Soit $\ell_T = (\ell_T(1), \ell_T(2), \dots, \ell_T(n+1))$ une suite des profondeurs d'un arbre binaire T et soit T' un sous arbre de T tel que la racine de T' est au niveau k dans T . Si $m_1 < m_2$ et $(\ell_T(m_1), \ell_T(m_1+1), \dots, \ell_T(m_2-1), \ell_T(m_2))$ est la sous-suite de ℓ_T correspondant aux feuilles de T' alors

$$\sum_{i=m_1}^{m_2} 2^{-\ell_T(i)} = 2^{-k}.$$

La suite $2^{-\ell_T} = (2^{-\ell_T(1)}, 2^{-\ell_T(2)}, \dots, 2^{-\ell_T(n+1)})$ est appelée la *suite de densité* de l'arbre binaire (la somme de ses valeurs est un). Alors on lui associe sa *suite de distribution* comme la suite croissante :

$$L_T = (2^{-\ell_T(1)}, 2^{-\ell_T(1)} + 2^{-\ell_T(2)}, \dots, \sum_{j=1}^i 2^{-\ell_T(j)}, \dots, 1).$$

Dans la suite de ce paragraphe, les suites des profondeurs sont notées en minuscules (ℓ par exemple) et les suites de distribution en majuscules (L). On suppose que \leq est l'ordre habituel pour deux suites de tailles n , i.e. si $\ell = (\ell(1), \dots, \ell(n+1))$ et $\ell' = (\ell'(1), \dots, \ell'(n+1))$, on dit que $\ell \leq \ell'$ si $\ell(i) \leq \ell'(i)$ pour tout $i \in [1, n+1]$.

Définition II.9. La transformation de taille-greffe \rightarrow sur B_n avec $n \geq 2$ est définie par le recouvrement $T \rightarrow T'$ s'il existe $k \geq 1$, $\tau_1 \in \circ\{\circ, \square\}^*$ et $\tau_2 \in \{\circ, \square\}^*$ tel que $T = \tau_1 \square \circ^k \square \square \tau_2$ et $T' = \tau_1 \circ \square \square \circ^{k-1} \square \tau_2$. Soit $\xrightarrow{*}$ la cloture réflexive et transitive de \rightarrow sur B_n .

La transformation de taille-greffe "taille" en remplaçant une 'petite branche' $T_1 = \circ \square \square$ de T par une feuille et greffe cette petite branche $T_1 = \circ \square \square$ à la place de la feuille \square située juste avant T_1 dans la notation polonaise de T . Voir la figure II.4 par exemple.

Proposition II.10. Soient $T, T' \in B_n$ et $\ell_T, \ell_{T'}$ leurs suites des profondeurs. Alors on a $T \rightarrow T'$ si et seulement s'il existe $p \geq 1$, $q \geq 2$ et $2 \leq i \leq n$ tels que

$$\begin{aligned} \ell_T &= (\ell_T(1), \ell_T(2), \dots, \ell_T(i-2), p, q, q, \ell_T(i+2), \dots, \ell_T(n+1)) \text{ et} \\ \ell_{T'} &= (\ell_T(1), \ell_T(2), \dots, \ell_T(i-2), p+1, p+1, q-1, \ell_T(i+2), \dots, \ell_T(n+1)). \end{aligned}$$

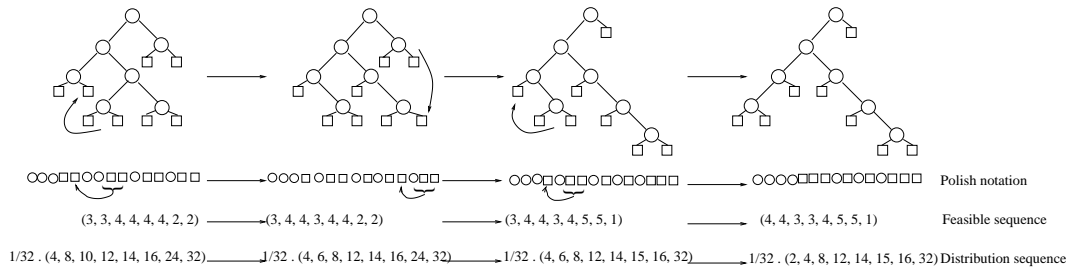


FIGURE II.4 : Trois transformations de taille-greffe dans B_7 .

Corollaire II.11. Soient $T, T' \in B_n$ et $L_T, L_{T'}$ leurs suites de distribution. Alors on a $T \rightarrow T'$ si et seulement s'il existe $p \geq 1, q \geq 2$ et $2 \leq i \leq n$ tels que $L_T = (L_T(1), \dots, L_T(i-2), L_T(i-2) + 2^{-p}, L_T(i-2) + 2^{-p} + 2^{-q}, L_T(i+1), \dots, 1)$ et $L_{T'} = (L_T(1), \dots, L_T(i-2), L_T(i-2) + 2^{-(p+1)}, L_T(i-2) + 2^{-p}, L_T(i+1), \dots, 1)$.

Définition II.12. Soient T et T' deux arbres différents dans B_n . Soit $\sigma_1 \in \{\circ, \square\}^*$ le plus long préfixe commun de T et T' dans la notation polonaise. Supposons que

$$T = \sigma_1 \sigma_2 \square \underbrace{\circ^j \square \square \square}_{\tau} \sigma_3$$

ou

- $j \geq 0$, et
- σ_2 est le mot vide ou $\sigma_2 \in \{\circ, \square\}^*$ et $\sigma_2 \square$ ne contient pas d'occurrence de $\tau = \circ \square \square$ (i.e. $\tau = \circ \square \square$ est l'occurrence la plus à gauche de $\circ \square \square$ dans T après σ_1), et
- $\sigma_3 \in \{\circ, \square\}^*$.

Alors on a nécessairement $T' = \sigma_1 \sigma'_2$ avec $\sigma'_2 \in \{\circ, \square\}^*$. On définit l'arbre $U(T, T') \in B_n$ (U pour UP) tel que $T \rightarrow U(T, T')$ et

$$U(T, T') = \sigma_1 \sigma_2 \underbrace{\circ \square \square}_{\tau} \circ^j \square \sigma_3.$$

De plus, on pose $U(T, T) = T$.

Par exemple, si :

$$\begin{aligned} T &= \circ \circ \square \square \circ \square \circ \circ \square \circ \circ \square \square \square \square \\ T' &= \circ \circ \square \square \circ \circ \square \square \circ \square \circ \circ \square \square \square \square \end{aligned}$$

alors $\sigma_1 = \circ \circ \square \square \circ$, $\sigma_2 = \square \circ \circ$, $\sigma_3 = \square \square$ et $j = 1$. On obtient $U(T, T') = \circ \circ \square \square \circ \square \circ \circ \circ \square \square \circ \square \square \square$.

Lemme II.13. Soient T et T' deux arbres dans B_n tels que leurs suites de distribution L_T et $L_{T'}$ vérifient $L_T > L_{T'}$. Alors $U(T, T')$ existe et sa suite de distribution $L_{U(T, T')}$ vérifie $L_T > L_{U(T, T')} \geq L_{T'}$.

Définition II.14. Soient T et T' deux arbres différents dans B_n avec $n \geq 2$. Soit $\sigma_1 \in \circ\{\circ, \square\}^*$ le plus long préfixe commun en notation polonaise. Supposons que $T = \sigma_1 \square \sigma_2$ avec $\sigma_2 \in \{\circ, \square\}^*$. Alors on a nécessairement

$$T' = \sigma_1 \sigma_2' \underbrace{\circ \square \square \square}_{\tau} \circ^j \square \sigma_3'$$

où

- $j \geq 0$, et
- σ_2' est le mot vide ou $\sigma_2' \in \circ\{\circ, \square\}^*$ tel que σ_2' ne contient pas d'occurrence de $\tau = \circ \square \square$ (i.e. τ est l'occurrence de $\circ \square \square$ la plus à gauche dans T' après σ_1), et
- $\sigma_3' \in \{\circ, \square\}^*$.

On définit l'arbre $D(T, T') \in B_n$ (D pour DOWN) tel que $D(T, T') \rightarrow T'$ et

$$D(T, T') = \sigma_1 \sigma_2' \square \circ^j \underbrace{\circ \square \square \square}_{\tau} \sigma_3'.$$

De plus, on pose $D(T, T) = T$.

Par exemple, si :

$$\begin{aligned} T &= \circ \circ \square \square \circ \square \circ \square \circ \circ \square \circ \square \square \square \\ T' &= \circ \circ \square \square \circ \circ \square \circ \square \square \circ \square \circ \square \square \end{aligned}$$

alors $\sigma_1 = \circ \circ \square \square \circ$, $\sigma_2' = \circ \square$, $\sigma_3' = \circ \square \square$ et $j = 1$. On obtient $D(T, T') = \circ \circ \square \square \circ \circ \square \square \circ \circ \square \square \circ \square \square$.

Lemme II.15. Soient T et T' deux arbres dans B_n tels que leurs suites de distribution L_T et $L_{T'}$ vérifient $L_T > L_{T'}$. Alors $D(T, T')$ existe et sa suite de distribution $L_{D(T, T')}$ vérifie $L_T \geq L_{D(T, T')} > L_{T'}$.

Théorème II.16. Soient T et $T' \in B_n$, L_T et $L_{T'}$ leur suites de distribution. Alors on a $T \xrightarrow{*} T'$ si et seulement si $L_T \geq L_{T'}$.

Théorème II.17. Pour tout n , l'ensemble partiellement ordonné $(B_n, \xrightarrow{*})$ est un treillis.

Notons qu'il existe des relations entre les treillis de Catalan déjà connus. En effet, rappelons que si T et T' sont deux éléments dans le treillis de Kreweras (partition non-croisées) tels que $T \leq T'$, alors on a $T \leq T'$ dans le treillis de Tamari. Si $T \leq T'$ dans le treillis de Tamari, alors $T \leq T'$ est aussi vrai dans le treillis de Stanley. Si $T \leq T'$ dans le treillis 'phagocyte' défini dans la section précédente [21], alors $T \leq T'$ est aussi vrai dans le treillis de Kreweras. L'ensemble des recouvrements du treillis 'phagocyte' est inclus dans l'ensemble des recouvrements du treillis de Kreweras. Cependant, le treillis 'taille-greffe' ne semble pas avoir des relations similaires avec d'autres treillis. Voir les figures II.5 et II.6.

Le treillis $(B_n, \xrightarrow{*})$ possède un plus grand élément $\mathbf{1}$ et un plus petit élément $\mathbf{0}$ et leur suites des profondeurs sont respectivement $\ell_{\mathbf{1}} = (n, n, n-1, \dots, 2, 1)$ et $\ell_{\mathbf{0}} = (1, 2, \dots, n-1, n, n)$. $(B_n, \xrightarrow{*})$ est symétrique car $T \xrightarrow{*} T'$ si et seulement si $\bar{T}' \xrightarrow{*} \bar{T}$. Le treillis $(B_n, \xrightarrow{*})$ n'est pas modulaire puisqu'il contient des pentagones (voir les figures II.5 et II.6).

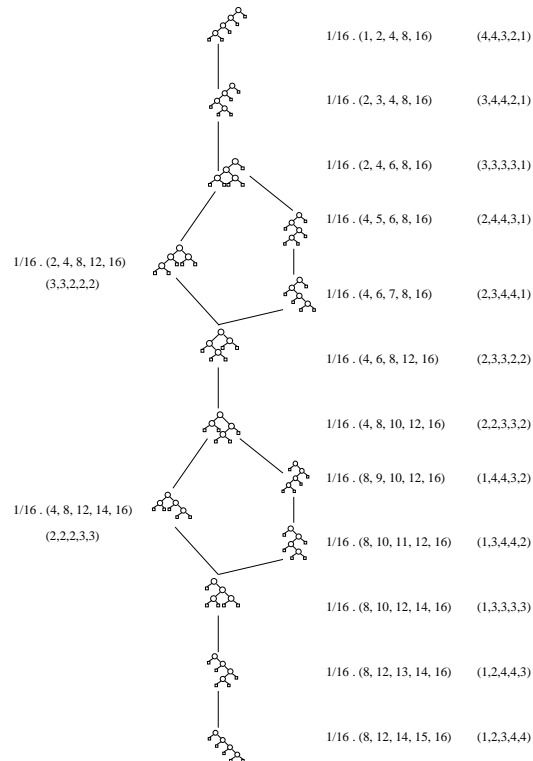


FIGURE II.5 : Le treillis 'taille-greffe' B_4 . Chaque arbre est codé par ses suite de profondeurs et de distribution.

Proposition II.18. Soient T et T' deux arbres dans B_n tels que $T \xrightarrow{*} T'$, alors

- (i) $U(\overline{T}, \overline{T}') \rightarrow T'$,
- (ii) $T \rightarrow D(\overline{T}, \overline{T}')$,
- (iii) le chemin $T' \leftarrow D(T, T') \leftarrow D(T, D(T, T')) \leftarrow D(T, D(T, D(T, T')))) \leftarrow \dots \leftarrow T$ est un plus long chemin entre T et T' ,
- (iv) le chemin $T \rightarrow U(T, T') \rightarrow U(U(T, T'), T') \rightarrow U(U(U(T, T'), T'), T') \rightarrow \dots \rightarrow T'$ est un plus court chemin entre T et T' .

Corollaire II.19. Soit \mathcal{C} le chemin défini par :

$$\mathbf{1} \leftarrow D(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \leftarrow D(\mathbf{0}, D(\mathbf{0}, \mathbf{1})) \leftarrow D(\mathbf{0}, D(\mathbf{0}, D(\mathbf{0}, \mathbf{1}))) \leftarrow \dots \leftarrow \mathbf{0}.$$

T appartient à \mathcal{C} si et seulement si T vérifie la condition (A) définie par : T a soit une unique occurrence de $\bigcirc \square \square$, soit deux occurrences de $\bigcirc \square \square$ telles qu'il n'existe pas de feuilles entre elles en notation polonaise de T . De plus, si T et T' appartiennent au chemin \mathcal{C} et vérifient $T \rightarrow T'$, alors T' est obtenu à partir de T par une transformation de taille-greffe de l'occurrence $\bigcirc \square \square$ la plus à droite dans T .

Corollaire II.20. Soit \mathcal{C}' le chemin défini par :

$$\mathbf{0} \rightarrow U(\mathbf{0}, \mathbf{1}) \rightarrow U(U(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \mathbf{1}) \rightarrow U(U(U(\mathbf{0}, \mathbf{1}), \mathbf{1}), \mathbf{1}) \rightarrow \dots \rightarrow \mathbf{1}.$$

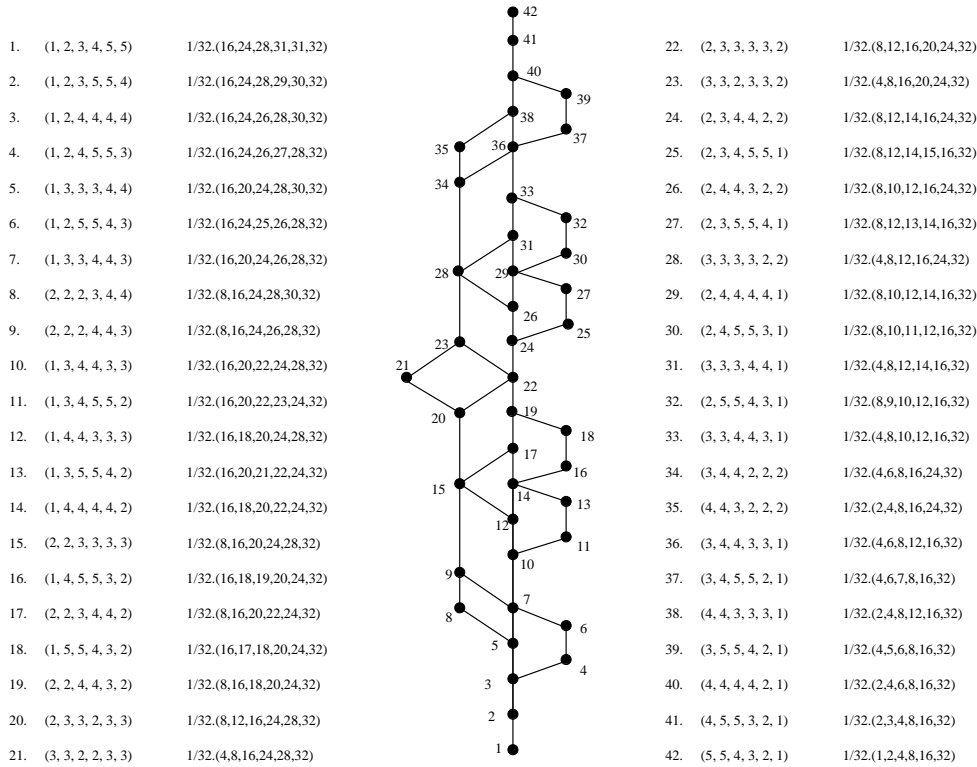


FIGURE II.6 : Le treillis 'taille-greffe' B_5 . Chaque arbre est codé par ses suites des profondeurs et de distribution.

Si $T \rightarrow T'$ est sur le chemin \mathcal{C}' alors T' est obtenu à partir de T par la transformation de taille-greffe la plus à gauche dans T .

Remarque 1 Par le Corollaire II.19, le plus long chemin entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ a une longueur de $2^n - (n + 1)$. Ce sont les nombres Euleriens donnés par la suite **A000295** dans [162]. Le plus court chemin entre $\mathbf{0}$ et $\mathbf{1}$ a une longueur de $(n - 1)^2$.

Maintenant nous montrons que les éléments max-(resp. min) irréductibles dans B_n sont énumérés par les nombres Euleriens. Rappelons que $x \in B_n$ est un élément max-(resp. min)-irréductible si $x = a \vee b$ (resp. $x = a \wedge b$) implique $x = a$ ou $x = b$.

Théorème II.21. *Le nombre d'éléments max-(resp. min)-irréductibles dans le treillis 'taille-greffe' $(B_n, \overset{*}{\rightarrow})$ est donné par les nombres Euleriens $2^n - (n + 1)$.*

Théorème II.22. *Le nombre $\text{cov}(n)$ de recouvrements dans B_n est égal à $\binom{2n}{n-1}$.*

Une nouvelle structure a été définie sur les arbres binaires via une transformation naturelle. La simplicité de la définition de la transformation de 'taille-greffe' est en contraste avec la difficulté de la preuve du théorème qui caractérise cette transformation.

Des problèmes doivent encore être résolus.

Existe-t-il un algorithme efficace et non-récursif pour calculer la fonction de Möbius du treillis 'taille-greffe' des arbres binaires comme dans [131]? On conjecture que la fonction

de Möbius prend ses valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$.

Est-ce qu'il existe un algorithme en temps polynomial calculant la longueur minimale d'un chemin entre deux arbres binaires dans le treillis [117] ? Si un tel algorithme existe, une nouvelle distance de chemin le plus court serait obtenue et pourrait être ajoutée dans le catalogue des distances déjà existantes sur les ensembles de Catalan [81, 130, 132, 128, 161].

Définissons la valuation v sur $(B_n, \overset{*}{\rightarrow})$ par : $v(T)$ est la longueur du plus long chemin entre T et $\mathbf{1}$. On conjecture que v vérifie que pour tout T et T' , $v(T)+v(T') \leq v(T \vee T') + v(T \wedge T')$ et $T < T' \implies v(T) > v(T')$. Si tel était le cas, alors $d(T, T') = v(T) + v(T') - 2v(T \vee T')$ serait une distance sur $(B_n, \overset{*}{\rightarrow})$ [32, 41].

Guttman, Krattenthaler et Viennot [86] énumèrent les k -chaînes dans les treillis de Stanley. Kreweras [103] énumère les k -chaînes dans les treillis des partitions non-croisées. Plus généralement, Chapoton prouve dans [47] que la suite **A000260** de [162] énumère le nombre d'intervalles dans le treillis de Tamari, i.e. le nombre de paires (T, T') telles que $T \leq T'$: voir aussi [82, p. 27]. Bernardi et Bonichon [34] construisent des bijections entre l'ensemble des intervalles de ces treillis et certaines triangulations (realizers). On a obtenu expérimentalement le nombre d'intervalles pour les treillis taille-greffe de petites tailles :

$$1, 3, 15, 101, 818, 7486, 74648, 793005, 8843056, 102464586, \dots$$

Cette suite n'apparaît pas dans [162]. Est-il possible d'obtenir la fonction génératrice de cette suite ?

II.3 Distance de rotation

Culik et Wood ont défini en 1982 la distance de rotation entre une paire d'arbres binaires comme le nombre minimum de rotations nécessaires pour transformer l'un en l'autre [59] (voir aussi la figure II.7). Il existe une bijection explicite bien connue entre les arbres binaires et les triangulations. Par conséquent, un système qui est isomorphe aux arbres binaires munis de la rotation l'est aussi pour les triangulations des polygones convexes munis de l'opération de bascule d'une diagonale (diagonal-flip en anglais). Une transformation qui bascule une diagonale est une opération qui convertit une triangulation en une autre en supprimant une diagonale dans la triangulation et en ajoutant la diagonale qui subdivise le quadrilatère restant dans le sens opposé (voir la figure II.8). Alors la distance de rotation des arbres binaires et la distance de bascule de diagonale des triangulations sont équivalentes.

Un problème ouvert est la complexité du calcul de la distance de rotation entre deux arbres. Lucas a présenté un algorithme en temps quadratique pour calculer la distance de rotation entre les arbres binaires d'une forme donnée en [109]. Mais dans le cas général, il reste le problème ouvert de savoir si les distances peuvent être calculées en temps polynomial.

Des bornes supérieures de ces distances ont été exhibées. Quelques auteurs approchent le problème en limitant la transformation élémentaire à une version plus restrictive de la rotation [40, 55, 56, 53, 110, 128, 146]. Evidemment ces distances de rotation restreintes majorent la distance de rotation usuelle. Une autre approche pour calculer une borne supérieure utilise l'opération de 'flexion' sur les arbres binaires [132].

Dans [130], une borne inférieure assez large de la distance de rotation est obtenue.

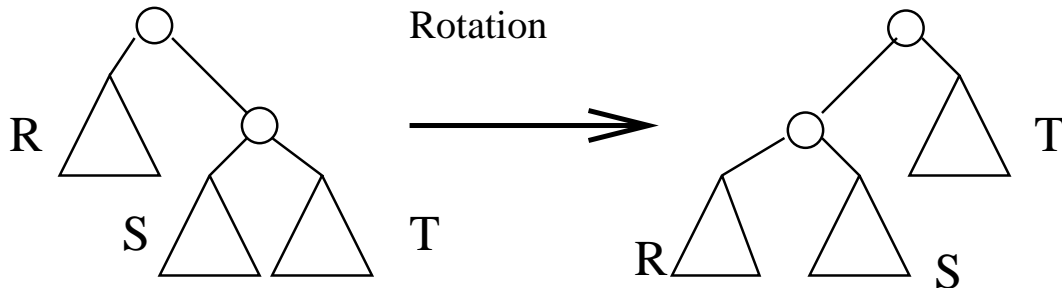


FIGURE II.7 : La rotation sur les arbres binaires.

Dans cette section, on présente un algorithme polynomial pour calculer des bornes inférieures et supérieures. Des calculs expérimentaux montrent que ces bornes sont assez efficaces. Dans la suite de cette section, on exposera nos résultats en terme de triangulation plutôt que d'arbres binaires.

Considérons un n -gon, i.e. un polygone convexe avec n cotés et avec un côté que l'on distingue en le mettant en haut horizontalement. On étiquète les sommets de 0 à $n - 1$ dans le sens des aiguilles d'une montre tel que les deux sommets en haut ont 0 et $n - 1$. Chaque triangulation d'un n -gone a $n - 2$ triangles et $n - 3$ diagonales qui ne s'intersectent pas. Soit \mathcal{T}_n l'ensemble des triangulations d'un n -gone. Il y a une bijection explicite entre \mathcal{T}_n et l'ensemble des arbres binaires avec $n - 2$ noeuds internes (et donc $n - 1$ feuilles) [161]. Voir la figure II.8. Si $T, S \in \mathcal{T}_n$, on note par $dist(T, S)$ le nombre minimum de bascules de diagonales nécessaires pour transformer T en S .

Le degré interne $d_i(T)$ d'un sommet i de $T \in \mathcal{T}_n$ est le nombre de diagonales incidentes à i ($0 \leq i \leq n - 1$). Pour une paire (T, S) de triangulations de \mathcal{T}_n , le degré 'composé' $cd_i(T, S)$ est le nombre total de diagonales incidentes au sommet i pour les deux triangulations. Si $T, S \in \mathcal{T}_n$ ont une diagonale $\{i, j\}$ en commun, on dit que $\{i, j\}$ est une $(2, 2)$ -diagonale si $cd_i(T, S) = cd_j(T, S) = 2$. Soient deux triangulations de \mathcal{T}_n , une diagonale basculable est une diagonale de la triangulation qui peut être basculée en une diagonale appartenant à l'autre triangulation [141]. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$, on définit le type d'un sommet i par $type_i(T, S) = (k : l)$ ou $k = d_i(T)$ et $l = d_i(S)$.

Définition II.23. ([161]) Soit $T \in \mathcal{T}_n$, on définit la triangulation normalisée $N_T(i, j)$ (respectivement $N'_T(i, j)$) en respectant la diagonale $\{i, j\}$ comme suit :

- (1) $N_T(i, j)$ et $N'_T(i, j)$ contiennent la diagonale $\{i, j\}$
- (2) $N_T(i, j)$ et $N'_T(i, j)$ contiennent chaque diagonale de T qui ne croisent pas la diagonale $\{i, j\}$
- (3) si T contient une diagonale $\{a, b\}$ qui croise la diagonale $\{i, j\}$, alors $N_T(i, j)$ (respectivement $N'_T(i, j)$) contient les diagonales $\{a, j\}$ et $\{b, j\}$ (respectivement $\{a, i\}$ et $\{b, i\}$).

Définition II.24. Dans le cas où $j = i + 2 \pmod n$, on dit que $N_T(i, i + 2)$ (respectivement $N'_T(i, i + 2)$) est la normalisation dans le sens contraire des aiguilles d'une montre (respectivement sens des aiguilles d'une montre) en respectant le sommet $i + 1$ et on note $N_T(i, i + 2) = N_T(i + 1)$ (respectivement $N'_T(i, i + 2) = N'_T(i + 1)$).

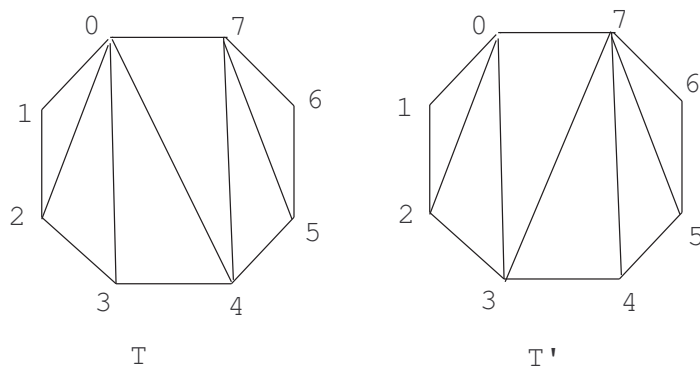


FIGURE II.8 : Une bascule de diagonale dans \mathcal{T}_8

Définition II.25. Soit $\{i, j\}$ une diagonale de $T \in \mathcal{T}_n$ telle que $d_i(T) = d_j(T) = 2$. Alors T peut être doublement normalisée en respectant la diagonale $\{i, j\}$ pour créer une nouvelle triangulation $N_T''(i, j)$ comme suit :

- (1) on bascule dans T la diagonale $\{i, j\}$
- (2) puis on bascule la diagonale adjacente au sommet i
- (3) et on bascule la diagonale adjacente au sommet j .

Définition II.26. Soit i un sommet de $T \in \mathcal{T}_n$ tel que $d_i(T) = 3$. On note $\{a, i\}$, $\{b, i\}$ et $\{c, i\}$ les trois diagonales incidentes au sommet i avec les sommets a, b, c dans le sens des aiguilles d'une montre. Alors T peut être pseudo-normalisée en respectant le sommet i pour créer une nouvelle triangulation $N_T'''(i)$ comme suit : on bascule les deux diagonales $\{a, i\}$ et $\{c, i\}$, et on bascule la diagonale du milieu $\{b, i\}$.

Il est important de noter que chacune de ces normalisations crée au moins une diagonale de la forme $\{i - 1, i + 1\} \pmod n$. Par la suite, les arêtes $\{i - 1, i\}$ et $\{i, i + 1\}$ seront 'grignotées' par l'algorithme exposé dans le paragraphe II.3.5.

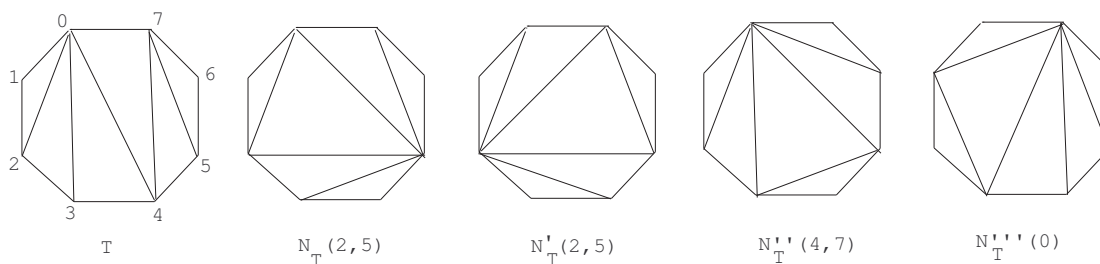


FIGURE II.9 : Quatre normalisations $T \in \mathcal{T}_6$

Lemme II.27. ([161]) Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$; s'il est possible de basculer une diagonale de T pour créer T_1 tel que T_1 a une diagonale de plus en commun avec S qu'elle n'a avec T , alors il existe un plus court chemin de T à S dans lequel la première opération de bascule crée T_1 .

Lemme II.28. ([161]) Soit $T, S \in \mathcal{T}_n$, si T et S ont une diagonale en commun, alors un plus court chemin de T à S ne bascule jamais cette diagonale.

Lemme II.29. ([161]) Si $T, S \in \mathcal{T}_n$ ont une diagonale commune, cette diagonale partage T (respectivement S) en deux sous-triangulations T' et T'' (respectivement S' et S'') de telles sortes que T' et S' (et donc T'' et S'') ont les mêmes sommets. Alors on a l'égalité : $dist(T, S) = dist(T', S') + dist(T'', S'')$.

Lemme II.30. Si $T, S \in \mathcal{T}_n$, alors il existe un sommet i tel que $cd_i(T, S) \leq 3$.

En vertu du lemme II.30, on étudie par la suite les différents types de sommets qui peuvent apparaître, i.e. $(2 : 0)$, $(1 : 1)$, $(3 : 0)$ et $(2 : 1)$. Le cas $(1 : 0)$ est un cas particulier du lemme II.27.

Maintenant on suppose que les hypothèses des lemmes II.27 et II.28 ne sont pas vérifiées.

II.3.1 Sommet de type $(2 : 0)$

Lemme II.31. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec un sommet i tel que $type_i(T, S) = (2 : 0)$, il existe un plus court chemin de T à S dans lequel les deux premières bascules créent soit $N_T(i)$ ou soit $N'_T(i)$.

Théorème II.32. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec un sommet i tel que $type_i(T, S) = (2 : 0)$, alors on a :

$$dist(T, S) = \min(dist(N_T(i), S), dist(N'_T(i), S)) + 2 \text{ et} \\ dist(T, S) \geq \max(dist(N_T(i), S), dist(N'_T(i), S)) + 1.$$

Théorème II.33. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec une $(2, 2)$ -diagonale $\{i, j\}$ telle que $d_T(i) = 2$, $d_S(i) = 0$, $d_T(j) = 2$ et $d_S(j) = 0$, on a :

$$dist(T, S) = dist(N''_T(i, j), S) + 3.$$

II.3.2 Sommet de type $(1 : 1)$

Théorème II.34. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec un sommet i tel que $type_i(T, S) = (1 : 1)$ alors les inégalités suivantes sont vraies :

$$dist(N_T(i), N_S(i)) + 1 \leq dist(T, S) \leq dist(N_T(i), N_S(i)) + 2.$$

II.3.3 Sommet de type $(3 : 0)$

Théorème II.35. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec un sommet i tel que $type_i(T, S) = (3 : 0)$ alors les inégalités suivantes sont vraies :

$$dist(N'''_T(i), S) + 1 \leq dist(T, S) \leq dist(N'''_T(i), S) + 3.$$

II.3.4 Sommet de type (2 : 1)

Théorème II.36. Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$ avec un sommet i tel que $\text{type}_i(T, S) = (2 : 1)$ alors les inégalités suivantes sont vraies :

$$\begin{aligned} \text{dist}(T, S) &\geq \max(\text{dist}(N_T(i), N_S(i)), \text{dist}(N'_T(i), N'_S(i))) + 1 \\ \text{dist}(T, S) &\leq \min(\text{dist}(N_T(i), N_S(i)), \text{dist}(N'_T(i), N'_S(i))) + 3. \end{aligned}$$

II.3.5 Algorithme pour le calcul de bornes inférieure et supérieure

L'objectif de l'algorithme suivant est de 'grignoter' les arêtes (et par conséquent les sommets) des deux triangulations en appliquant le lemme II.27 et les théorèmes II.32, II.33, II.34, II.35, II.36. Il est nécessaire de vérifier au départ s'il existe une diagonale pouvant être 'basculée' directement. Dans ce cas, on fait cette bascule immédiatement. Dans le cas contraire, l'existence des types (1 : 0), (2 : 0), (1 : 1), (3 : 0) et (2 : 1) (dans cet ordre) est alors vérifiée. En fait quelque soit l'ordre, l'algorithme est correct ; on choisit cependant cet ordre pour des raisons statistiques. Cela conduit statistiquement (et surtout expérimentalement) à un plus petit nombre de bascules et donc fournit de meilleures bornes de la distance de rotation.

Maintenant nous donnons un algorithme récursif (basé sur le lemme II.30) pour trouver des bornes inférieure et supérieure (dans notre algorithme *low* et *up*) pour la distance de rotation entre deux triangulations $T, S \in \mathcal{T}_n$. Rappelons que T, S et donc aussi $(i : j)$, $(j : i)$ jouent le même rôle dans notre algorithme.

Algorithme (Calcul de *low* et *up*)

Soient $T, S \in \mathcal{T}_n$

procedure low-up(T,S,n)

si $n \geq 3$ alors

si T et S ont une diagonale en commun alors

$T := (T_1, T_2); S := (S_1, S_2);$
 $n_1 := \text{size}(T_1) = \text{size}(S_1); n_2 := \text{size}(T_2) = \text{size}(S_2);$
low-up(T_1, S_1, n_1);
low-up(T_2, S_2, n_2);

else

si T et S vérifient le Lemma II.27 alors

on bascule la diagonale dans T ou dans S

$low := low + 1; up := up + 1$

low-up(T, S, n);

sinon

si T et S ont un sommet i de type (2 : 0) alors

si T et S ont une (2,2)-diagonale $\{i, j\}$ alors

$T := N''_T(i, j)$ ou $S := N''_S(i, j)$

$low := low + 3; up := up + 3$

low-up($T, S, n - 2$);

sinon


```

     $T := N_T(i)$  ou  $S := N_S(i)$ 
     $low := low + 1; up := up + 2$ 
    low-up( $T, S, n - 1$ );
sinon
  si  $T$  et  $S$  ont un sommet  $i$  de type (1 :1) alors
     $T := N_T(i)$  et  $S := N_S(i)$ 
     $low := low + 1; up := up + 2$ 
    low-up( $T, S, n - 1$ );
  sinon
    si  $T$  et  $S$  ont un sommet  $i$  de type (3 :0) alors
       $T := N_T'''(i)$  ou  $S := N_S'''(i)$ 
       $low := low + 1; up := up + 3$ 
      low-up( $T, S, n - 1$ );
    sinon  $T$  et  $S$  ont un sommet  $i$  de type (2 :1)
       $T := N_T(i)$  et  $S := N_S(i)$ 
       $low := low + 1; up := up + 3$ 
      low-up( $T, S, n - 1$ );

```

fin low-up

Exemples :

Si (T, S) sont deux triangulations $\in \mathcal{T}_{23}$ de Rogers ([141], p. 88), alors l'algorithme précédent fournit $20 \leq dist(T, S) \leq 29$. La distance exacte de rotation est 21.

Si (T, S) sont les deux triangulations $\in \mathcal{T}_{20}$ de Lucas ([110], p. 261), alors l'algorithme fournit $17 \leq dist(T, S) \leq 25$. La valeur exacte de la distance de rotation est 20.

Une applet Java pour calculer les bornes inférieures et supérieures est disponible sur le site web : <http://www.u-bourgogne.fr/jl.baril/titi.html>. Cette applet choisit la meilleure borne entre les résultats obtenus ci-dessus et la borne donnée dans [132]. La complexité en temps est polynomiale : $\mathcal{O}(n^3)$.

II.3.6 Résultats expérimentaux

On présente ici quelques résultats exhaustifs et statistiques. Dans le premier tableau on obtient des résultats exhaustifs pour $n \leq 13$ concernant le ratio des paires (T, S) vérifiant $(up - low) \leq k$ avec $k = 0, 1, 2, n/2$. Dans le second tableau, on donne des résultats probabilistes pour $n \in [14, 100]$ en générant aléatoirement un grand nombre de paires (T, S) . On remarque que notre algorithme donne des bornes efficaces pour des grandes valeurs de n : 99% des paires (T, S) ont des bornes inférieures et supérieures vérifiant $(up - low) \leq n/3$.

Résultats exhaustifs

$n - gons$	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$Up = Low$	100(%)	96	88	78	67	57	47	38	33
$Up - Low \leq 1$	100	100	99	99	95	90	82	73	54
$Up - Low \leq 2$	100	100	100	100	100	99	96	91	64
$Up - Low \leq n/2$	100	100	100	100	100	100	99,9	99,9	99,9

Résultats statistiques

$n - gons$	14	15	16	17	18	20	30	50	100
$Up - Low \leq n/10$	81,5(%)	77	75	71	69	65	59	45	39
$Up - Low \leq n/5$	98	97	97	96	95	95	95	94	93
$Up - Low \leq n/3$	99,9	99,9	99,9	99,9	99,8	99,8	99,8	99,7	99,7
$Up - Low \leq n/2$	99,9	99,9	99,9	99,9	99,9	99,9	99,9	99,9	99,9

II.4 Conclusion

Dans cette partie, nous avons exhibé deux nouvelles structures naturelles sur des ensembles de Catalan (parenthésages et arbres binaires). Il reste toutefois de nombreuses questions concernant ces structures. Par exemple, peut-on trouver la longueur d'un plus court chemin entre deux éléments de la structure en un temps polynomial? Cette question reste encore un problème ouvert pour le treillis de Tamari. Toutefois, nous avons réussi dans la dernière section à obtenir un algorithme d'approximation pour la distance de rotation.

Il reste donc de nombreuses directions de recherche prometteuses concernant le treillis de Tamari et ces deux nouvelles structures (phagocyte, taille-greffe)...

Chapitre III

Motifs dans les permutations

III.1 Introduction

Dans ce dernier chapitre, je présente des travaux de recherche concernant l'étude des motifs dans les permutations. Il s'agit d'un domaine très abordé depuis ces dix dernières années. En effet, de nombreux travaux existent pour l'énumération de classes de permutations à motifs exclus ainsi que pour la génération exhaustive des objets de telles classes [3, 178, 163, 38, 48, 49, 45, 96, 113, 112].

La première partie traite d'un problème issu de la bioinformatique présenté en terme de permutations. Une suite du génôme est alors modélisée par une permutation où chaque valeur correspond à un gène. On étudie alors l'évolution de la permutation identité lorsqu'on lui applique plusieurs duplications en miroir avec une perte aléatoire de certains gènes. On caractérise alors les permutations obtenues après un nombre donné de duplications et on obtient des algorithmes efficaces de construction d'un chemin de duplications entre l'identité et une permutation donnée quelconque.

Dans la seconde partie, on répond à une question proposée par Atkinson et al. : *la cloture cyclique des permutations évitant le motif $k(k-1) \dots 321$ a-t-elle une base finie ?*. L'étude de ce problème nous donne une nouvelle classe d'objets combinatoires énumérée par les nombres de Catalan. On donne enfin des résultats généraux concernant les clotures cylindrique et torique.

III.2 Duplication en miroir du génome

La duplication de génome consiste à copier une partie du génome et de l'insérer dans le génome, suivi par une perte d'une copie de chaque gène dupliqué (voir [36, 52, 87, 105, 153] pour une explication des différentes méthodes de duplication). D'un point de vue formel, un génome de n gènes est représenté par une permutation de taille n . Dans un article précédent, Chaudhuri et al. [50] étudient une variante appelée 'tandem duplication-random loss model' : La partie dupliquée (de taille K) du génome est insérée immédiatement après la partie originale, suivie par la procédure de perte. Ce modèle est issu de la biologie évolutionnaire où il est appliqué au génome mitochondrial des vertébrés. On donne un

exemple du processus de duplication de la permutation 123456 suivi par la procédure de perte aléatoire.

$$123456 \rightsquigarrow 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ \underbrace{1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6}_{\text{duplication}} \rightsquigarrow \underbrace{1\ 2\ \beta\ 4\ \beta\ 6\ \alpha\ \beta\ 3\ \beta\ 5\ \beta}_{\text{procédure de perte}} \rightsquigarrow 124635.$$

Ce modèle de duplication sera appelée la *W*-duplication (*W* pour *Whole*). Chaudhuri et al. introduisent une notion de distance entre deux génomes et ils fournissent un algorithme pour la calculer efficacement dans certains cas. Bouvel et Rossin [43] ont aussi étudié ce modèle. Ils prouvent que la classe des permutations obtenues à partir de l'identité après p étapes (la partie dupliquée est ici de longueur K) est aussi une classe de permutations à motifs exclus. Plus particulièrement, dans le cas restreint d'une duplication totale (*whole duplication* ou *W-duplication* pour abrégé), ils obtiennent après p *W*-duplications, la classe des permutations évitant toutes les permutations minimales ayant 2^p descentes, minimale dans le sens de la relation d'inclusion des motifs dans une permutation. De plus, ils calculent le nombre nécessaire et suffisant d'étapes de duplications de largeur K pour obtenir n'importe quelle permutation à partir de l'identité. Plus récemment, Bouvel et Pergola [42] ont montré une caractérisation locale et simple et plusieurs propriétés sur l'ensemble des permutations minimales avec 2^p descentes. Récemment Mansour et Yan [115] ont aussi donné propriétés sur les permutations minimales.

Dans cette section, on étudie la duplication totale en miroir (*whole mirror duplication-random loss model* ou (*WM-duplication* pour abrégé) : C'est le même processus que pour la *W-duplication* sauf que l'on copie le miroir de la portion originale. Ce modèle apparaît couramment dans les génomes eubactériens dans la plupart des chromosomes [51, 121]. La figure III.1 illustre une *WM-duplication* pour la permutation $\sigma = 5421673$:

$$5421673 \rightsquigarrow 5\ 4\ 2\ 1\ 6\ 7\ 3\ 3\ 7\ 6\ 1\ 2\ 4\ 5 \rightsquigarrow 5\ 4\ \beta\ \alpha\ 6\ \beta\ 3\ 7\ \beta\ 1\ 2\ \beta\ \rightsquigarrow 5463712.$$

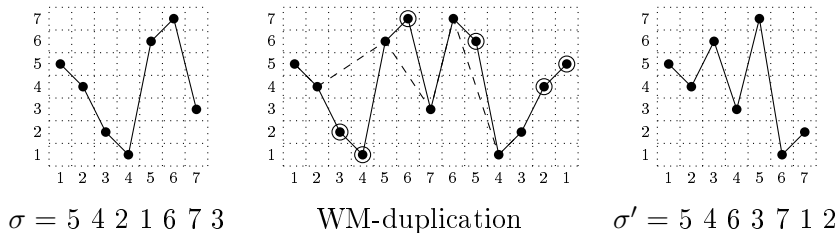


FIGURE III.1 : Une *WM-duplication* de la permutation 5421673. Les points encadrés sont supprimés lors de la procédure de perte.

Soit \mathcal{S}_n l'ensemble des suites s de taille n , $s = s_1s_2\dots s_n$, formées d'entiers positifs. Le *miroir* de s est $\bar{s} = s_ns_{n-1}\dots s_1$. Une *sous-suite* de s est $s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_m}$ pour $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$. Une sous-suite est appelée une *sous-chaîne* lorsque l'ensemble $\{i_j, 1 \leq j \leq m\}$ est un intervalle, *i.e.* lorsque la sous-suite est formée d'éléments consécutifs de s . Une *montée* (resp. une *descente*) de s est une position i ($1 \leq i \leq n-1$) avec $s_i < s_{i+1}$ (resp. $s_i > s_{i+1}$). Un *parcours montant* (resp. un *parcours descendant*) de s est une sous-chaîne (de longueur au moins un) dans laquelle les éléments sont en ordre

croissant (resp. ordre décroissant). Plus généralement, un parcours montant (ou parcours descendant) est dit *maximal* lorsqu'il ne peut pas être étendu en un plus long parcours montant (resp. parcours descendant) dans la suite. Voir Rodney et Wilf [46] pour des résultats concernant l'énumération des permutations qui ont un nombre donné de parcours montant et descendant. Par exemple, si $s = 5467312$ alors la position 4 est une descente, la sous-chaîne 46 est un parcours montant, et 467 est un parcours montant maximal. Notons que 5 est aussi un parcours montant maximal. Une *vallée* de s est une sous-chaîne qui est un parcours descendant suivi d'un parcours montant l'un des deux ayant une longueur au moins deux, *i.e.* une sous-chaîne $s_k s_{k+1} \dots s_\ell$, $1 \leq k < \ell \leq n$ telle qu'il existe j ($k < j < \ell$) vérifiant $s_k > s_{k+1} > \dots > s_j$ et $s_j < s_{j+1} < \dots < s_\ell$. Une vallée est *maximale* si la sous-chaîne est maximale pour cette propriété. Dans l'exemple ci-dessus, les sous-chaînes 5467 et 7312 sont les seules vallées maximales de s . On note par $val(s)$ le nombre de vallées maximales dans s , *i.e.* la cardinalité de l'ensemble $\{j, s_j < \min\{s_{j-1}, s_{j+1}\}\}$. Une formule récursive énumérant les permutations avec un nombre donné de vallées peut être trouvée dans [139].

D'un autre côté, une suite s de taille n est une *permutation* lorsque chaque s_i est un élément différent dans l'ensemble $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Dans la suite, les permutations seront notées par des lettres grecques : σ, π, τ, \dots . Soit S_n l'ensemble de toutes les permutations de taille n ($n \geq 1$). En relation avec les définitions précédentes, toute permutation σ contient au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ vallées. Une permutation $\sigma \in S_n$ sera dite *alternantes* si $\sigma_1 > \sigma_2 < \sigma_3 > \sigma_4 < \sigma_5 > \dots$. Dans la littérature [33], les permutations alternantes sont aussi appelées *down-up* et sont énumérées par les nombres d'Euler (A000111 [162]). Par exemple, la permutation 324165 est alternante. Notons qu'une permutation alternante de taille n contient exactement $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ vallées.

On rappelle ici la définition d'un motif dans une permutation. Une permutation π de taille k , $k \leq n$, est un *motif* (pattern en anglais) de la permutation $\sigma \in S_n$ s'il existe une sous-suite de σ qui est isomorphe à π en conservant l'ordre des éléments ; *i.e.*, s'il y a une sous-suite $\sigma_{i_1} \sigma_{i_2} \dots \sigma_{i_k}$ de σ (avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$) telle que $\sigma_{i_\ell} < \sigma_{i_m}$ lorsque $\pi_\ell < \pi_m$. On écrit $\pi \prec \sigma$ pour noter que π est un motif de σ . Une permutation σ qui ne contient pas un motif π est dite *qui évite* π . Par exemple, $\sigma = 1423$ contient les motifs 132, 312 et 123 ; mais σ évite le motif 321. La classe de toutes les permutations évitant les motifs $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k$ est notée $S(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$, et $S_n(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ est l'ensemble des permutations de taille n évitant π_1, π_2, \dots et π_k . On dit aussi que $S(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k)$ est une classe de permutations à motifs exclus de base $\{\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_k\}$. Une classe \mathcal{C} de permutations est *stable* pour \prec si, pour $\sigma \in \mathcal{C}$, pour $\pi \prec \sigma$, alors on a aussi $\pi \in \mathcal{C}$. On donne maintenant une remarque cruciale pour la suite de notre étude.

Remarque : Si une classe \mathcal{C} de permutations est stable pour \prec alors \mathcal{C} est aussi une classe de permutations à motifs exclus possédant la base $\mathcal{B} = \{\sigma \notin \mathcal{C}, \forall \pi \prec \sigma \text{ avec } \pi \neq \sigma, \pi \in \mathcal{C}\}$.

◇

Dans le prochain paragraphe, on prouve que la classe des permutations obtenues à partir de l'identité après un nombre donné p de WM-duplications est la classe des permutations avec au plus $2^{p-1} - 1$ vallées. C'est aussi la classe des permutations évitant les permutations alternantes de taille $2^p + 1$. De plus, on obtient la longueur du plus court chemin entre une permutation et l'identité. Ensuite dans le paragraphe suivant, on fournit deux algorithmes (d'une complexité polynomiale) permettant de reconstruire un plus court chemin entre

l'identité et une permutation quelconque. Le premier trouve le chemin en reculant, c'est à dire en partant de la permutation et en allant vers l'identité. Le deuxième utilise un algorithme efficace pour générer le code de Gray binaire réfléchi [37, 84] et reconstruit le chemin en partant de l'identité et en allant vers la permutation. Dans la dernière partie, on donne des résultats pour d'autres modèles de duplications mélangeant les W- et les WM-duplications et découlant de notre étude.

III.2.1 Permutations à motifs exclus et le modèle de WM-duplication

Nous étudions ici le modèle de WM-duplication en terme de permutations à motifs exclus. Nous établissons que la classe $\mathcal{C}(p)$ obtenue à partir de l'identité après p WM-duplications est exactement la classe des permutations évitant toutes les permutations alternantes de taille $2^p + 1$.

Lemme III.1. *Soit σ et π deux permutations différentes telles que $\pi \prec \sigma$. Alors σ contient au moins autant de vallées que π .*

Lemme III.2. *Une permutation obtenue à partir de l'identité après un nombre donné p de WM-duplications contient au plus $2^{p-1} - 1$ vallées.*

Théorème III.3. *La classe $\mathcal{C}(p)$ des permutations obtenues à partir de l'identité après un nombre donné p de WM-duplications est la classe des permutations avec au plus $2^{p-1} - 1$ vallées.*

Preuve : En considérant le lemme III.2, il suffit de prouver que chaque permutation σ avec au plus $2^{p-1} - 1$ vallées peut être obtenue à partir de l'identité après p WM-duplications. On procède par récurrence sur p . En effet, soit σ une permutation avec k vallées telle que $2^{p-2} - 1 < k \leq 2^{p-1} - 1$. Alors σ peut s'écrire $\sigma = \tau\tau'$ où τ correspond au plus long préfixe de σ contenant exactement $2^{p-2} - 1$ vallées et τ' le suffixe restant. On décompose la permutation $\tau = u_1d_1u_2d_2 \dots u_\ell d_\ell$, où u_i et d_i sont respectivement des parcours montant et parcours descendant définis comme suit : u_1 est le premier parcours montant maximal sans prendre sa plus grande valeur ; d_1 le parcours descendant juste après u_1 ; u_2 le parcours montant juste après d_1 sans prendre sa plus grande valeur, ainsi de suite... Notons que u_1 peut être vide ce qui ne peut pas se produire pour d_ℓ . Par exemple, $\tau = 5421673$ a la décomposition : u_1 est vide, $d_1 = 5421$, $u_2 = 6$ et $d_2 = 73$. Soit aussi $\tau' = u_{\ell+1}d_{\ell+1} \dots u_k d_k$ la décomposition similaire pour τ' . Maintenant appliquons le processus suivant : on classe en ordre décroissant les valeurs apparaissant dans d_ℓ ou u_1 afin de créer un parcours descendant D_ℓ ; on classe en ordre croissant les valeurs situées dans u_ℓ ou $d_{\ell+1}$ afin de créer un parcours montant U_ℓ ; on construit alors la suite $S = U_\ell D_\ell$. On classe dans une suite décroissante $D_{\ell-1}$ les valeurs situées dans $d_{\ell-1}$ ou $u_{\ell+2}$, et ainsi de suite. A chaque étape j , on insère les suite obtenues U_j et D_j au début de S . La permutation $S = \dots U_{\ell-1} D_{\ell-1} U_\ell D_\ell$ obtenue à la fin du processus contient au plus $2^{p-2} - 1$ vallées. Voir figure III.2 pour un exemple de construction de S . Donc, par récurrence S peut être obtenue à partir de l'identité après $(p - 1)$ WM-duplications. Par construction, σ est atteint avec une WM-duplication de S ce qui signifie que σ peut être construite à partir de l'identité avec p WM-duplications. Notons que la permutation σ a été décomposée en une partition de parcours montant

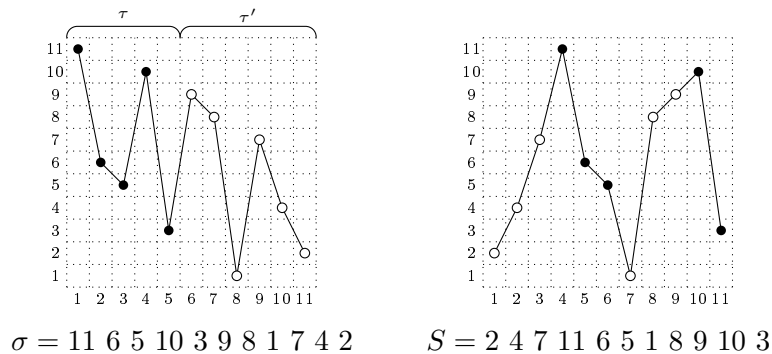


FIGURE III.2 : Décomposition $\sigma = \tau\tau'$ et la permutation S obtenue après le processus de la preuve du Théorème III.3. On a $\tau = 11\ 6\ 5\ 10\ 3$, $\tau' = 9\ 8\ 1\ 7\ 4\ 2$, u_1 est vide, $d_1 = 11\ 6\ 5$, u_2 est vide, $d_2 = 10\ 3$, u_3 est vide, $d_3 = 9\ 8\ 1$, u_4 est vide, $d_4 = 7\ 4\ 2$ et, $D_2 = 10\ 3$, $U_2 = 1\ 8\ 9$; $D_1 = 11\ 6\ 5$; $U_1 = 2\ 4\ 7$. Donc $S = U_1D_1U_2D_2 = 2\ 4\ 7\ 11\ 6\ 5\ 1\ 8\ 9\ 10\ 3$.

et parcours descendant, u_j et d_j . On utilisera cette décomposition pour l'algorithme de reconstruction d'un plus court chemin entre l'identité et σ .

□

Corollaire III.4. *Soit σ une permutation et $val(\sigma)$ le nombre de ses vallées. Dans le modèle de WM-duplication, $\lceil \log_2(val(\sigma) + 1) \rceil + 1$ étapes sont nécessaires et suffisantes pour obtenir σ à partir de l'identité.*

On fournira par la suite deux algorithmes permettant de reconstituer un chemin entre l'identité et une permutation.

Théorème III.5. *La classe $\mathcal{C}(p)$ des permutations obtenues après un nombre donné p de WM-duplications est la classe des permutations évitant les permutations alternantes de taille $2^p + 1$.*

Par exemple, $\mathcal{C}(1) = S(213, 312)$ et $\mathcal{C}(2) = S(21435, 31425, 41325, 32415, 42315, 21534, 31524, 51324, 32514, 52314, 41523, 51423, 42513, 52413, 43512, 53412)$.

On obtient aussi le résultat plus général (voir théorème III.6) pour la classe des permutations ayant au plus p vallées. Notons, avec [139, 95, 97], une fonction génératrice bivariée pour cette classe est :

$$\frac{1}{1-y} \left(1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} \sqrt{y-1} \cdot \tan(x\sqrt{y-1} + \arctan(\frac{1}{\sqrt{y-1}})) \right),$$

où y est la variable dédiée au nombre maximal de vallées dans la permutation et x est dédiée à la longueur de la permutation.

Théorème III.6. *La classe des permutations ayant au plus p vallées est la classe des permutations évitant les permutations alternantes de taille $2p + 3$.*

III.2.2 Considérations algorithmiques

On présente ici deux algorithmes pour reconstituer un scenario possible de WM-duplications pour une permutation $\sigma \in S_n$: le premier construit un plus court chemin entre l'identité et σ en reculant de σ vers l'identité ; le deuxième algorithme donne une construction du chemin de l'identité vers σ en utilisant le code de Gray binaire réfléchi [84] et en parcourant le chemin de l'identité vers σ . On discute aussi de leur complexité. Notons que si l'on applique σ^{-1} à chaque élément du chemin on obtient naturellement un plus court chemin de WM-duplications entre σ^{-1} et l'identité.

III.2.2.1 Un chemin de $12\dots n$ vers $\sigma \in S_n$ obtenu en reculant à partir de σ

On explique ici comment on peut établir un algorithme pour construire un scenario de WM-duplications de l'identité vers $\sigma \in S_n$. L'algorithme reconstituera ce chemin en reculant à partir de σ . On partitionne la permutation σ comme suit : $\sigma = u_1 d_1 u_2 d_2 \dots u_k d_k$ où $u_1 = \sigma_1 \dots \sigma_{i_1}$ est le parcours montant maximal contenant la première entrée σ_1 ; d_k est le parcours descendant maximal contenant σ_n ; d_1 est le parcours descendant maximal contenant σ_{i_1+1} ; u_k est le parcours montant maximal juste avant d_k , *i.e.* la valeur juste avant d_k dans σ appartient à u_k ; on continue le processus en alternant les parcours montant et les parcours descendant jusqu'à ce que la permutation σ soit entièrement partitionnée. Attention, cette décomposition n'est pas la même que celle utilisée dans la preuve du théorème III.3.

Pour i de 1 à $\ell = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$, on définit par U_i (resp. D_i) le classement en ordre croissant (resp. décroissant) de u_i et d_{k-i+1} (resp. d_i et u_{k-i+1}). Soit $\pi = U_1 D_1 U_2 D_2 \dots U_\ell D_\ell$ la concaténation de toutes les sous-chaînes classées U_i et D_i où D_ℓ peut être vide. Alors π contient au plus $(\ell - 1) = \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{\text{val}(\sigma)+2}{2} \rfloor - 1 = \lfloor \frac{\text{val}(\sigma)}{2} \rfloor$ vallées. Cette étape demande $\mathcal{O}(n)$ calculs puisqu'on peut simultanément détecter et classer les parcours montant et les parcours descendant. En itérant ce processus avec cette nouvelle permutation π , le Corollaire III.4 nous garantit que la procédure BackPath (voir Algorithm 1) construit un chemin de l'identité vers σ en $(\lceil \log_2(\text{val}(\sigma) + 1) \rceil + 1)\mathcal{O}(n)$, *i.e.* $\mathcal{O}(n \cdot \log_2(n))$ dans le pire des cas. Par exemple, ce processus appliqué à la permutation $\sigma = \mathbf{5421673}$ donne le chemin $\sigma \leftarrow \mathbf{3576421} \leftarrow 1234567$ (les parcours montant sont en gras).

```

procedure BackPath
while  $\sigma \neq 12\dots n$  do
  -  $\pi \leftarrow \text{empty}$ 
  - Soit  $\sigma = u_1 d_1 u_2 d_2 \dots u_k d_k$  la partition en parcours montant et descendant
  for  $i \leftarrow 1$  to  $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  do
    - Classer en ordre croissant  $u_i$  et  $d_{k-i+1}$  et ajouter le résultat sur la droite de  $\pi$ 
    - Classer en ordre décroissant  $d_i$  et  $u_{k-i+1}$  et ajouter le résultat sur la droite de  $\pi$ 
  end for
  -  $\sigma \leftarrow \pi$ 
end while

```

Algorithm 1: La procédure BackPath fournissant un scenario de WM-duplications de l'identité vers $\sigma \in S_n$.

III.2.2.2 Un chemin de WM-duplications de $12\dots n$ vers $\sigma \in S_n$

Ici on construit un chemin de WM-duplications à partir de $12\dots n$ vers la permutation $\sigma \in S_n$. Contrairement à l'algorithme précédent, ici le chemin est construit directement en commençant avec l'identité et en allant vers la permutation σ . On décompose la permutation $\sigma = u_1d_1u_2d_2\dots u_kd_k$ en parcours montant et descendant de la même manière que pour la preuve du théorème III.3. On rappelle cette décomposition : u_i et d_i sont respectivement parcours montant descendant définis comme suit : u_1 est le premier parcours montant sauf sa plus grande valeur ; d_1 le parcours descendant juste après u_1 ; u_2 le parcours montant juste après d_1 sauf sa plus grande valeur, ainsi de suite... Notons que u_1 peut être vide : une telle décomposition est donnée en exemple dans la preuve du théorème III.3.

On étiquète maintenant chaque parcours (montant et descendant) de la décomposition avec le code de Gray binaire réfléchi [84] : on peut le faire en utilisant un algorithme loopless introduit par Bitner, Ehrlich, et Reingold [37]. Par exemple, la figure III.3 montre un tel étiquetage. La structure du code de Gray binaire réfléchi B_n est cruciale : $B_n = 0 \cdot B_{n-1} \cup 1 \cdot \overline{B_{n-1}}$ initialisé par $B_1 = \{0, 1\}$ où $\overline{B_n}$ est la liste B_n considérée en ordre inverse. Supposons que $\sigma = u_1d_1\dots u_\ell d_\ell u_{\ell+1}d_{\ell+1}\dots u_kd_k$ où tous les parcours de u_1 à d_ℓ ont une étiquette avec le dernier bit 0, et les autres parcours ont 1 comme dernier bit. En accord avec la preuve du théorème III.3, on reconstitue la permutation ci-dessus π de σ en concaténant (sur la gauche) le classement en ordre décroissant D_ℓ de d_ℓ et $u_{\ell+1}$, le classement en ordre croissant U_ℓ de u_ℓ et $d_{\ell+1}$, ainsi de suite...

A contrario, à l'étape j de notre algorithme on fait une WM-duplication de π en : (i) conservant dans la première copie de π les éléments étiquetés 0 sur le j ème bit significatif, et, (ii) en conservant dans le miroir les éléments étiquetés 1 sur le j ème bit significatif (voir la figure III.3 pour un exemple). Cette étape demande seulement $\mathcal{O}(n)$ calculs.

En itérant ce processus, le Corollaire III.4 nous garantit que la procédure Path (voir Algorithm 2) construit un chemin de l'identité à σ en $(\lceil \log_2(\text{val}(\sigma) + 1) \rceil + 1)\mathcal{O}(n)$, *i.e.* $\mathcal{O}(n \cdot \log_2(n))$ dans le pire des cas.

procedure Path

- $\pi = 12\dots n$

- Partitionner $\sigma = u_1d_1u_2d_2\dots u_kd_k$ en parcours montant et descendant

- Etiqueter les parcours montant et descendant avec le code de Gray réfléchi (loopless algorithm [37])

for $j = 1$ **to** $1 + \lfloor \log_2(k - 1) \rfloor$ **do**

- Faire une WM-duplication sur π qui conserve dans la première copie de π exactement les éléments étiquetés 0 sur le j ème bit.

end for

Algorithm 2: La procédure Path donnant un scénario de WM-duplications de $12\dots n$ vers $\sigma \in S_n$.

Une Applet Java pour ce dernier algorithme est donnée sur le site internet <http://www.u-bourgogne.fr/jl.baril>

$$\begin{array}{cccccc}
000 & 001 & 011 & 010 & 110 & 111 \\
\text{2} & \text{3} & \text{1} & \text{6} & \text{8} & \text{4} & \text{5} & \text{9} & \text{7}
\end{array}$$

$$123456789 \rightarrow 245897631 \rightarrow 231679854 \rightarrow 231684597$$

FIGURE III.3 : Etiquetage des parcours montant et descendant de $\sigma = 231684597$ avec le code de Gray réfléchi. Exemple de chemin de WM-duplications à partir de l'identité vers σ .

III.2.3 Autres modèles de duplication

Ici, on explore deux variantes du modèle de WM-duplication : 1) on fait une WM-duplication de l'identité suivi par plusieurs W-duplications et, 2) on fait une WM- et/ou W-duplication de l'identité suivi par plusieurs W-duplications. Pour ces deux cas on fournit une caractérisation de la classe des permutations obtenues après p duplications.

III.2.3.1 Une WM-duplication suivie par plusieurs W-duplications

On a vu auparavant qu'une WM-duplication de l'identité donne la classe des permutations ne contenant pas de vallée. Donc, on obtient par récurrence que la classe des permutations obtenues après une WM-duplication de l'identité suivie par $(p-1)$ W-duplications est la classe des permutations avec au plus $2^{p-1} - 1$ vallées. On déduit le théorème suivant :

Théorème III.7. *La classe des permutations obtenues après une WM-duplication de l'identité suivie par $(p-1)$ W-duplications est la classe des permutations évitant les permutations alternantes de longueur $2^p + 1$.*

III.2.3.2 Une W- ou WM-duplication suivie par plusieurs W-duplications

Ici, on fait une W- ou WM-duplication de l'identité suivie par plusieurs W-duplications.

Théorème III.8. *La classe des permutations obtenues après une W- ou WM-duplication de l'identité suivie par p W-duplications est l'union de deux classes : (i) la classe des permutations ayant au plus $2^p - 1$ vallées et, (ii) la classe des permutations ayant au plus $2^{p+1} - 1$ descentes.*

Corollaire III.9. *La classe $\mathcal{C}'(p)$ des permutations obtenues après une W- ou WM-duplication de l'identité suivie par p W-duplications est la classe des permutations évitant les permutations de taille $3 \cdot 2^p + 1$ ayant exactement 2^p vallées et 2^{p+1} descentes.*

Par exemple, $\mathcal{C}'(0) = S(4132, 3142, 4312, 3241, 3214, 4231, 4213, 2143)$; on a calculé expérimentalement la cardinalité de la base de $\mathcal{C}'(1)$, qui est 720. On déduit alors le résultat plus général :

Corollaire III.10. *La classe des permutations ayant au plus p vallées et au plus $2p + 1$ descentes est la classe des permutations évitant les permutations de taille $3p + 4$ et ayant exactement $p + 1$ vallées et $2p + 2$ descentes.*

Notons que l'ensemble des permutations de taille $3p+4$ ayant exactement $p+1$ vallées et $2p+2$ descentes est aussi l'ensemble des permutations de même taille, avec le même nombre de vallées et où chaque montée est immédiatement précédée par une descente (ce qui définit une vallée). Cet ensemble a été étudié par Shapiro et al. [157] (voir aussi la suite A101280 dans [162]). En effet, ils énumèrent les permutations de taille n ayant k 'peaks' et avec la propriété supplémentaire que chaque montée est immédiatement suivie par une descente. Donc, la cardinalité de notre ensemble est obtenue quand $n = 3p+4$ et $k = p+1$. Par exemple, les premières cardinalités pour $p = 0, 1, 2, 3, 4$ sont 8, 720, 230144, 179266560, 277662253056.

III.2.4 Future direction de recherche

Beaucoup de problèmes relatifs restent ouverts. Par exemple, soit σ_1 et σ_2 deux permutations dans S_n . Peut-on exhiber un algorithme efficace pour calculer la permutation π qui minimise la somme $d(\pi, \sigma_1) + d(\pi, \sigma_2)$ où $d(\pi, \sigma)$ est le nombre minimum de WM-duplications nécessaires pour transformer π en σ ? Peut-on caractériser la classe de permutations à motifs exclus correspondante aux permutations obtenues à partir de l'identité après une W-duplication suivie par p WM-duplications? Peut-on obtenir des résultats similaires pour la duplication miroir partielle (non totale)? Peut-on faire un travail similaire lorsque l'on permet de faire à chaque étape une W ou WM duplication?

III.3 Cloture cyclique de $S(k(k-1) \dots 21)$

Rappelons quelques notations utiles pour la suite de ce paragraphe. Soit S (respectivement S_n) la classe des permutations (respectivement permutations de taille n). On a $S = \bigcup_{n \geq 0} S_n$. Comme nous l'avons fait depuis le début de ce mémoire, on représente les permutations en notation linéaire, *i.e.* si i_1, i_2, \dots, i_n sont n valeurs distinctes dans $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, on note la permutation $\sigma \in S_n$ par la suite $i_1 i_2 \dots i_n$ si $\sigma(k) = i_k$ pour $1 \leq k \leq n$. Par exemple, la permutation identité de taille n , Id_n , sera écrite $1 2 \dots n$. Un *segment* d'une permutation σ est une sous-suite de la forme $\sigma_i \sigma_{i+1} \dots \sigma_{j-1} \sigma_j$ ou $\sigma_j \sigma_{j+1} \dots \sigma_n \sigma_1 \dots \sigma_{i-1} \sigma_i$ avec $1 \leq i \leq j \leq n$. La *cardinalité* (ou *longueur*) d'un segment W sera notée $|W|$. Une permutation $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n \in S_n$ contient le *motif* $\pi \in S_k$, $k \geq 2$, si et seulement s'il existe une suite d'indices $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ telle que $\sigma(i_1) \sigma(i_2) \dots \sigma(i_k)$ est ordonnée comme π . On écrit $\pi \prec \sigma$ pour dire que π est un motif de σ . Une permutation σ qui ne contient pas π comme motif est dite *qui évite* π . Soit B un ensemble de permutations. On denote par $S_n(B)$ (respectivement $S(B)$) l'ensemble (respectivement la classe) des permutations dans S_n (respectivement S) évitant tous les motifs $\pi \in B$. Par exemple, $25314 \notin S_5(123)$ mais $43152 \in S_5(123)$. Voir par exemple [39, 160]. Dans la suite, une sous-suite d'une permutation σ ordonnée suivant le motif $D_k = k(k-1) \dots 21$ sera appelée un D_k -motif de σ . Une classe \mathcal{C} de permutations est *fermée* (or *stable*) pour la relation \prec si, pour tout $\sigma \in \mathcal{C}$, pour tout $\pi \prec \sigma$, alors on a aussi $\pi \in \mathcal{C}$. Une telle classe peut toujours être définie par une classe de permutations $S(B)$ évitant des motifs. Dans le cas où B est minimale (relativement à la relation \prec), B est dite une *base*.

Soit $\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$ une permutation dans S_n . On définit deux bijections r (*rotation cyclique*) et ℓ (*rotation cylindrique*) sur S_n de la manière suivante : $r(\sigma) = \sigma_n \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$

et $\ell(\sigma) = (\sigma_1 \bmod (n)+1)(\sigma_2 \bmod (n)+1) \dots (\sigma_n \bmod (n)+1)$. Par soucis de simplicité, on dira qu'une permutation $\sigma' \in S_n$ est une *rotation cyclique* (resp. *rotation cylindrique*) d'une permutation $\sigma \in S_n$ si $\sigma' = r^k(\sigma)$ (resp. $\sigma' = \ell^k(\sigma)$) pour un entier $k \in [1..n]$. Par exemple, 231 et 312 sont toutes les deux des rotations cycliques de $123 \in S_3$; 213 et 132 sont elles des rotations cylindrique de $321 \in S_3$. La *cloture cyclique* $cc(\mathcal{C})$ (resp. *cloture cylindrique* $cl(\mathcal{C})$) d'une classe \mathcal{C} est la classe des permutations qui peuvent être obtenues par une rotation cyclique (resp. rotation cylindrique) d'une permutation de \mathcal{C} . Enfin, la *cloture torique* $tr(\mathcal{C})$ de \mathcal{C} est définie par $cc(cl(\mathcal{C}))$ qui est aussi égal à $cl(cc(\mathcal{C}))$.

De nombreuses études ont été faites sur les clotures de classes de permutations : énumération des permutations d'une longueur donnée dans la classe ; caractérisation de la base associée à la classe ; et récemment leurs liens avec les classes fermées relativement à la rotation cyclique. Rappelons maintenant les principaux résultats obtenus par Albert et al. (Voir [2]).

Soit \mathcal{C} la classe $S(B)$ où B est un ensemble de motifs. Nous savons que $cc(\mathcal{C})$ est une classe à motifs exclus où sa base est l'ensemble des permutations qui sont minimales et qui n'appartiennent pas à $cc(\mathcal{C})$. Une permutation est minimale relativement à l'ensemble de motif B lorsque la permutation contient au moins un motif de B et que tout motif propre à la permutation exclut tous les motifs de B . Soit σ une permutation dans \mathcal{C} et θ un motif de σ (relativement à B). Le *segment témoin* $W(\theta)$ de θ est le segment de σ (considéré circulairement) commençant par la valeur juste après la dernière de θ et finissant par la première valeur de θ dans σ . Albert et al. donne une condition nécessaire et suffisante pour que σ appartienne (ou pas) à la cloture cyclique de \mathcal{C} .

Lemme III.11. [2] $\sigma \notin cc(\mathcal{C})$ si et seulement si les segments témoins couvrent σ .

De plus, ils obtiennent une condition suffisante pour que la classe $cc(\mathcal{C})$ ait une base de cardinalité finie.

Proposition III.12. [2] Soit $\mathcal{C} = S(B)$, où B est finie et supposons qu'il existe une borne Δ dépendant de B seulement telle que, pour tout $\sigma \notin cc(\mathcal{C})$, il y a une collection d'au plus Δ segments témoins qui couvrent σ . Alors $cc(\mathcal{C})$ possède une base finie.

Albert et al. déduisent de la proposition III.12 que $cc(S(321))$, $cc(S(231))$ et $cc(S(4321))$ ont des bases finies. Ils montrent aussi que la cloture cyclique d'une classe peut avoir une base infinie (c'est le cas de la cloture de $S(265143)$). Ils donnent également plusieurs résultats d'énumération très intéressants.

Cette partie est organisée de la façon suivante. Dans un premier temps, on prouve que la cloture cyclique de $S(k(k-1) \dots 21)$ a une base finie B . De plus, on prouve que la plus petite taille d'une permutation minimale de B est $2k-1$, et que ces permutations sont énumérées par $(2k-1).c_k$ où c_k est le k -ième nombre de Catalan. On caractérise aussi ces permutations. Ensuite, on étudie les clotures cylindriques de classes fermées. On montre une dualité avec la cloture cyclique ce qui nous permet de prouver que la cloture cylindrique de $S(k(k-1) \dots 21)$ est aussi à base finie. Enfin, on étudie la cloture torique. On donne une condition suffisante pour que la classe $tr(\mathcal{C})$ ait une base finie. On propose ainsi plusieurs questions ouvertes concernant la cloture torique de certaines classes de permutations. Plus précisément, on a obtenu la preuve que $tr(S(321))$ est à base finie, mais nous ne la donnons pas ici. En effet, la preuve contient énormément de cas à vérifier

et ne contient pas de concepts particulièrement intéressants. On finit en présentant d'autres questions ouvertes concernant l'énumération de certaines clotures toriques de classes.

Soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n telle que $\sigma \notin cc(S(D_k))$ pour $k \geq 3$. Pour $x \in \{1, \dots, n\}$, on définit $\mathcal{W}_\sigma(x)$ par l'ensemble des sous-suites $\theta = \theta_1 \theta_2 \dots \theta_{k-1} \theta_k$ de σ (considérée circulairement), ordonnées comme $D_k = k(k-1) \dots 21$ et telles que $x \in W(\theta)$. Soit \mathcal{W}_σ l'union de tous les $\mathcal{W}_\sigma(x)$ pour $1 \leq x \leq n$. Dans la suite, on omet l'indice σ pour $\mathcal{W}_\sigma(x)$ et \mathcal{W}_σ puisque ce sera implicite en fonction du contexte. Pour $\theta, \theta' \in \mathcal{W}$, on définit une relation d'ordre \leq par : $\theta' \leq \theta$ si et seulement si (a) $|W(\theta')| < |W(\theta)|$; ou (b) $|W(\theta')| = |W(\theta)|$ et le mot associé $\theta'_1 \theta'_2 \dots \theta'_k$ est plus petit que $\theta_1 \theta_2 \dots \theta_k$ en ordre lexicographique. Alors \mathcal{W} est un ensemble fini non vide totalement ordonné. Soit θ sont élément maximum. Alors, σ a une structure spéciale illustrée par la figure III.4 et décrite ci-dessous.

En effet, σ peut s'écrire (modulo rotation) :

$$\sigma = \theta_1 \alpha_1 \theta_2 \alpha_2 \dots \theta_{k-1} \alpha_{k-1} \theta_k \alpha_k$$

ou $W(\theta) = \alpha_k \theta_1$, $\theta_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ et α_i sont des segments de σ pour $i \in [1, k]$. Par convenance, on pose $\theta_{k+1} = 0$ et $\theta_0 = n+1$. Pour $i \in [1, k-1]$, on définit la sous-suite α_i^- (resp. α_i^+) des éléments dans α_i qui sont plus petit que θ_{i+1} (resp. plus grand que θ_{i-1}). D'un autre côté, $\alpha_{i,j}^-$, $i \in [1, k-2]$, $j \in [i+2, k+1]$, (resp. $\alpha_{i,j}^+$, $i \in [2, k-1]$, $j \in [0, i-2]$), est la sous-suite de α_i^- (resp. α_i^+) constituée par toutes les valeurs plus grandes que θ_j (resp. moins grandes que θ_j).

Avec ces hypothèses, σ vérifie les propriétés structurales suivantes.

Fait 1. Pour $i \in [1, k-1]$, α_i ne contient pas de valeur dans l'intervalle $[\theta_{i+1}, \theta_i]$.

Si il existe $y \in \alpha_i$ tel que $y \in [\theta_{i+1}, \theta_i]$, alors $\theta' = \theta_1 \dots \theta_i y \theta_{i+1} \dots \theta_{k-1}$ est une sous-suite de σ appartenant à \mathcal{W} tel que $|W(\theta')| > |W(\theta)|$ ce qui donne une contradiction avec la maximalité de θ .

Fait 2. Pour $i \in [1, k-1]$, α_i ne contient pas de valeur dans $[\theta_i, \theta_{i-1}]$.

Si il existe $y \in \alpha_i$ tel que $y \in [\theta_i, \theta_{i-1}]$, alors $\theta' = \theta_1 \dots \theta_{i-1} y \theta_{i+1} \dots \theta_k$ est une sous-suite de σ appartenant à \mathcal{W} telle que $\theta \leq \theta'$ ce qui donne une contradiction.

Fait 3. Pour $i \in [1, k-2]$, $j \in [i+2, k]$, $\alpha_{i,j}^-$ appartient à $S(D_{j-i})$ et α_i^- appartient à $S(D_{k-i})$.

Si $\alpha_{i,j}^-$ contient une sous-suite $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-i}$ ordonnée comme D_{j-i} , alors $\theta' = \theta_1 \dots \theta_i \rho_1 \dots \rho_{j-i} \theta_j \dots \theta_{k-1}$ appartient à \mathcal{W} et vérifie $|W(\theta')| > |W(\theta)|$ ce qui donne une contradiction.

Fait 4. Pour $i \in [2, k-1]$, $j \in [0, i-2]$, $\alpha_{i,j}^+$ appartient à $S(D_{i-j})$.

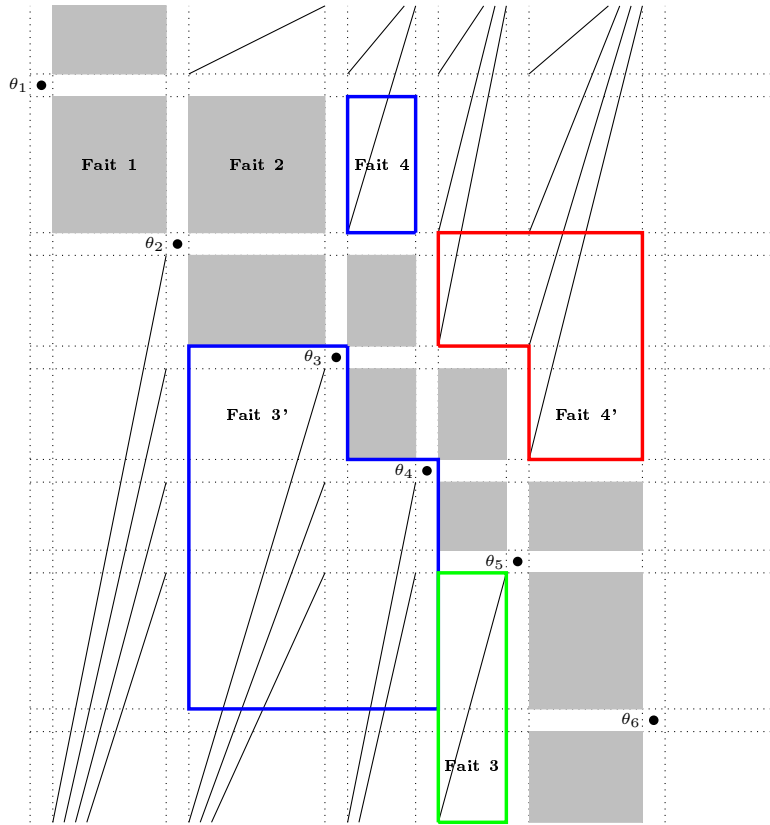
Si $\alpha_{i,j}^+$ contient une sous-suite $\rho_1 \rho_2 \dots \rho_{j-i}$ ordonnée comme D_{i-j} , alors $\theta' = \theta_1 \dots \theta_j \rho_1 \dots \rho_{j-i} \theta_{i+1} \dots \theta_{k-1}$ appartient à \mathcal{W} et vérifie $\theta \leq \theta'$ ce qui donne une contradiction.

Les faits suivants sont une simple généralisation des faits 3 et 4. Les preuves sont obtenues *mutatis mutandis*.

Fait 3'. Pour $i \in [1, k-2]$, $j \in [i+2, k]$, $\ell \in [i+1, k-1]$, $\alpha_{i,j}^- \theta_{i+1} \alpha_{i+1,j}^- \theta_{i+2} \dots \alpha_{\ell-1,j}^- \theta_\ell$ appartient à $S(D_{j-i})$ et $\alpha_i^- \theta_{i+1} \alpha_{i+1}^- \theta_{i+2} \dots \alpha_{\ell-1}^- \theta_\ell$ appartient à $S(D_{k-i})$.

Fait 4'. Pour $i \in [2, k-1]$, $\ell \in [i+1, k]$, $j \in [0, \ell-3]$, $\alpha_{i,j}^+ \theta_{i+1} \alpha_{i+1,j}^+ \theta_{i+2} \alpha_{i+2,j}^+ \dots \alpha_{\ell-1,j}^+ \theta_\ell$ appartient à $S(D_{\ell-j-1})$.

FIGURE III.4 : La structure spéciale d'une permutation $\sigma \notin S(D_k)$. Une aire remplie ne contient pas de point de la forme (i, σ_i) , $1 \leq i \leq n$. Une suite de j diagonales croissantes dans une aire signifie que l'aire ne contient pas de motif $(j+1)j \dots 21$.



Théorème III.13. Soit $k \geq 3$ un entier. Alors $cc(S(D_k))$ possède une base finie.

Preuve. Soit $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_n$ une permutation de taille n qui n'appartient pas à $cc(S(D_k))$. Le point crucial de la preuve est de trouver un nombre borné (indépendamment de n) de segments témoins qui couvrent σ . Finalement, on conclura grâce à la proposition III.12.

Soit $\theta = \theta_1 \dots \theta_k$ un élément maximum de \mathcal{W} . Modulo une rotation cyclique, σ peut se décomposer comme suit :

$$\sigma = \theta_1 \alpha_1 \theta_2 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} \theta_k \alpha_k.$$

Notons que α_k et $\theta_1 = \sigma_1$ sont évidemment couverts par $W(\theta)$ puisque $W(\theta) = \alpha_k \theta_1$. Donc il suffit de prouver que $\alpha_i \theta_{i+1}$ pour $1 \leq i \leq k-1$ sont couverts par un nombre borné de segments témoins.

Soit i tel que $1 \leq i \leq k-1$ et σ^i la rotation de σ définie par $\sigma^i = \alpha_i \theta_{i+1} \dots \theta_k \alpha_k \theta_1 \alpha_1 \dots \theta_{i-1} \alpha_{i-1} \theta_i$. Par hypothèse, il existe une sous-suite ρ de σ^i (considéré circulairement) telle que $\theta_{i+1} \in W(\rho)$. Si α_i est vide, il n'y a rien à faire puisque $\alpha_i \theta_{i+1}$ est couvert par $W(\rho)$. Maintenant, supposons que α_i est non vide, et considérons la première valeur x_1 de α_i . Alors, il existe une sous-suite $\rho = \rho_1 \rho_2 \dots \rho_k$ de σ^i ordonnée pareil que D_k telle que $x_1 \in W(\rho)$. On prend pour ρ l'élément maximal de $\mathcal{W}(x_1)$.

On discute sur la première valeur ρ_1 de ρ : (i) $\rho_1 \notin \alpha_i$; (ii) $\rho_1 \in \alpha_i^-$ et (iii) $\rho_1 \in \alpha_i^+$. Le cas (i) est immédiatement résolu puisque cela signifie que $\alpha_i \theta_{i+1}$ est contenu dans $W(\rho)$.

Regardons le cas (ii) : $\rho_1 \in \alpha_i^-$. Notons que ρ_k apparaît sur la droite de θ_k (dans σ^i), puisque sinon θ ne serait pas maximal dans \mathcal{W} (car $\theta_1 \in W(\rho)$ et $|W(\rho)| > |W(\theta)|$). Soit j le plus petit entier, $1 \leq j \leq k-1$, tel que ρ_j appartient à $\alpha_i^- \alpha_{i+1}^- \dots \alpha_{k-1}^-$ mais pas à ρ_{j+1} . Alors, la structure particulière (Fait 3') de σ induit que la sous-suite $\rho' = \theta_{i+1} \theta_{i+2} \dots \theta_{i+j} \rho_{j+1} \rho_{j+2} \dots \rho_k$ est ordonnée comme D_k et $x \in W(\rho')$. Cela donne une contradiction avec le fait que ρ est un élément maximal de $\mathcal{W}(x_1)$. Donc, le cas (ii) ne se produit jamais.

Regardons le cas (iii) : $\rho_1 \in \alpha_i^+$. S'il existe j , $1 \leq j \leq k-1$ tel que $\rho_j \in \alpha_i^+$ et $\rho_{j+1} \in \alpha_i^-$, alors on considère ℓ comme étant le plus petit entier $j+1 \leq \ell \leq k-1$, tel que ρ_ℓ appartient à $\alpha_i^- \dots \alpha_{k-1}^-$ mais pas $\rho_{\ell+1}$ (ℓ existe car ρ_k est sur la droite de θ_k). Avec le même argument que pour le cas (ii), Fait 3' induit que $\rho' = \rho_1 \dots \rho_j \theta_{i+1} \theta_{i+2} \dots \theta_{i+\ell-j} \rho_{\ell+1} \dots \rho_k$ est une sous-suite dans $\mathcal{W}(x_1)$ tel que $\rho \leq \rho'$. C'est une contradiction. Donc la sous-suite $\rho^1 = \rho$ vérifie la propriété que toute valeur de ρ^1 est nécessairement dans $\alpha_i^+ \theta_{i+1} \alpha_{i+1}^+ \dots \alpha_{k-1}^+ \theta_k \alpha_k \theta_1 \alpha_1^- \theta_2 \alpha_2^- \dots \alpha_{i-1}^- \theta_i$. Moins formellement, on dit que ρ_1 est situé au-dessus de θ dans σ^i . Puisque cette propriété est cruciale pour la suite de la preuve, on appelle cette propriété la *propriété de dominance* de ρ^1 sur θ .

Maintenant on considère le plus petit j_1 , $1 \leq j_1 \leq k-1$, tel que $\rho_{j_1}^1$ appartient à α_i mais pas $\rho_{j_1+1}^1$. En considérant le Fait 4 (ou 4') avec la propriété de dominance de ρ^1 sur θ , on déduit $j_1 < i-1$.

Maintenant, on remplace $x_1 = x$ par la valeur x_2 de α_i juste après ρ_1^1 (si elle existe ; sinon on prend $x_2 = \theta_{i+1}$). Par hypothèse, x_2 est aussi couvert par le segment témoin $W(\rho^2)$ où ρ^2 est un autre motif ordonné comme D_k , et tel que ρ_k^2 appartient à σ^i sur la droite de ρ_k^1 ou sur la gauche de x_2 . Avec le même argument que ci-dessus, ρ^2 a la propriété de dominance sur ρ^1 , *i.e.*, moins formellement, la suite ρ^2 est au-dessus ρ^1 . Donc, ρ^2 contient au plus $j_2 \leq j_1 - 1$ valeurs dans α_i^+ .

En itérant ce raisonnement pour la valeur juste après ρ^2 , on construit une sous-suite ρ^3 telle que le nombre j_3 de ses valeurs dans α_i^+ vérifie $j_3 \leq j_2 - 1$.

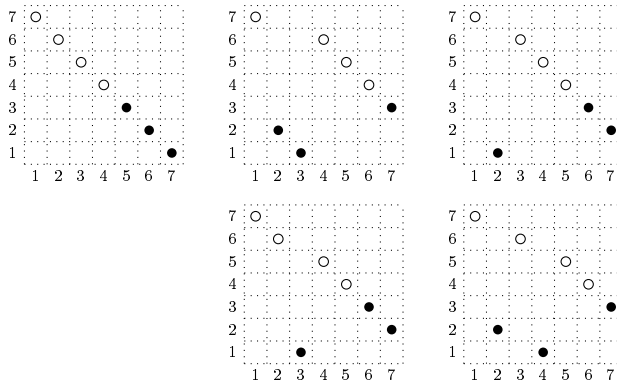
Le processus finit après au plus $i-1$ étapes. Cela signifie que α_i peut être couvert par les segments témoins $W(\rho^\ell)$ pour certains ℓ , tel que $1 \leq \ell \leq i-2 \leq k-2$, *i.e.* avec au plus $i-2$ segments témoins, ce qui est une borne dépendant de k seulement. Par conséquent $\alpha_i \theta_{i+1}$ peut être couvert par au plus $i-1$ segments témoins. Donc, σ est couvert par au plus $1 + \sum_{\ell=1}^{k-1} \ell = 1 + \frac{k(k-1)}{2}$ segments témoins. \square

Théorème III.14. $cc(S_{2k-\ell}(D_k)) = S_{2k-\ell}$ pour $2 \leq \ell \leq 2k-1$.

Théorème III.15. $cc(S_{2k-1}(D_k))$ est énuméré par $(2k-1)! - (2k-1)c_{k-1}$ ou $(c_k)_{k \geq 1}$ est la suite de Catalan.

Notons qu'une permutation de taille $(2k-1)$ $\sigma \notin cc(S(D_k))$ commençant par $2k-1$ ne contient pas de motif de la forme 123 (cette remarque est déduite de la preuve du théorème précédent). De plus, la preuve du théorème précédent induit une bijection constructive entre l'ensemble des bons parenthésages de taille $2k-2$ et l'ensemble des permutations de taille $2k-1$, commençant par $2k-1$, et contenant un motif D_k dans chaque rotation cyclique. En effet, on considère la représentation binaire $b = b_1 \dots b_{2k-2}$ des bons parenthésages, *i.e.*

FIGURE III.5 : Les cinq permutations σ commençant par 7 telles que $\sigma \notin cc(S_7(D_4))$: **7654321**, **7216543**, **7165432**, **7615432**, **7261543**. Le motif le plus à gauche θ est illustré en gras dans la notation linéaire de σ et illustré par des points vides dans la représentation ci-dessous. Les bons parenthésages correspondant sont respectivement $((()))$, $((())())$, $((()))$, $()(())$ et $()()()$.



$b_i = 0$ si la i -ième parenthèse est une parenthèse fermante, $b_i = 1$ sinon). Par convenance, on ajoute $b_{2k-1} = 0$ sur la droite de b . Maintenant, soit j , $1 \leq j \leq 2k - 1$, le rang du zéro le plus à droite à gauche du un le plus à droite dans b (si j n'existe pas on pose $j = 2k - 1$). Alors, on traverse b de la droite vers la gauche (de l'indice j à 1), et on étiquète chaque zéro en ordre croissant à partir de 1. Finalement, on continue d'étiqueter (en ordre croissant) les éléments restants de b de la droite vers la gauche. Par exemple, le parenthésage $(((((())((())))))$ a une représentation binaire 10111010011100000 où $j = 9$ (en gras). Sa permutation correspondante $17\ 4\ 16\ 15\ 14\ 3\ 13\ 21\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6\ 5$ contient le motif D_9 dans chaque rotation cyclique. Voir la figure III.5 dans le cas $k = 4$.

Le théorème III.13 montre que la base B de $cc(S(D_k))$ est finie. Les théorèmes III.14 et III.15 induisent que la plus petite taille d'une permutation minimale est $2k - 1$, et que ces permutations sont énumérées par $(2k - 1) \cdot c_{k-1}$. Il reste à caractériser les autres éléments de la base B , ce que je n'ai pas réussi à faire. Notons que Albert et al. ont obtenu expérimentalement les éléments de la base de $cc(S(321))$: 15432, 14325, 164253, 163254 et 1472536. Nous avons obtenus expérimentalement que la base de $cc(S(4321))$ contient 5 permutations minimales de taille 7, 32 de taille 8, 54 de taille 9, et 136 de taille 10.

Théorème III.16. *Les inversions de taille $2k - 1$ qui n'appartiennent pas à $cc(S(D_k))$ sont énumérées par $\frac{k(k+1)}{2}$.*

Pour $k = 3$, il y a 6 involutions de taille 5 qui n'appartiennent pas à $cc(S(D_3))$: 54321, 15432, 21543, 32154, 43215 et 14325.

III.3.1 La cloture cylindrique

Dans ce paragraphe, on étudie la cloture cylindrique $cl(\mathcal{C})$ d'une classe fermée \mathcal{C} , *i.e.*, la classe des permutations pouvant être obtenues par une rotation cylindrique d'une per-

mutation dans \mathcal{C} . On fournit plusieurs résultats généraux faisant des liens entre les clotures cyclique et cylindrique.

Lemme III.17. *Si X est un ensemble de permutations alors $\pi \in cc(X) \iff \pi^{-1} \in cl(X^{-1})$. Par conséquent, si $X = S(B)$ alors $cc(S(B)) = cl(S(B^{-1}))^{-1}$. De plus, si la base B est stable par inversion, i.e. $B = B^{-1}$, alors $cc(S(B)) = cl(S(B))^{-1}$.*

Maintenant nous posons $\mathcal{C} = S(B)$ où B est une base. Comme pour le cas de la rotation cyclique, $cl(\mathcal{C})$ est aussi une classe de permutations à motifs exclus. Soit σ une permutation dans \mathcal{C} et θ un motif (appartenant à B) dans σ . On définit par *intervalle témoin* de σ l'intervalle cyclique $W'(\theta) =]\max(\theta).. \min(\theta)] = [n] \setminus]\min(\theta).. \max(\theta)[$. Notons que $W'(\theta)$ est un intervalle dans $[n]$ considéré circulairement, mais ce n'est pas forcément un segment dans σ . On remarque facilement que $W'(\theta)$ est aussi un segment témoin de σ^{-1} (considéré circulairement) relativement au motif θ^{-1} . Deux résultats similaires aux lemme III.11 et proposition III.12 peuvent être déduit :

Lemme III.18. *$\sigma \notin cl(\mathcal{C})$ si et seulement si les intervalles témoins $W'(\theta)$ couvrent $[n]$ (ou de façon équivalente σ).*

Proposition III.19. *Soit $\mathcal{C} = S(B)$, où B est de cardinalité finie et supposons qu'il existe une borne Δ dépendante de B seulement telle que, pour tout $\sigma \notin cl(X)$, il y a une collection d'au plus Δ intervalles témoins qui couvrent σ (ou de façon équivalente $[n]$). Alors $cl(X)$ a une base finie.*

Proof. La preuve est obtenue de la même façon que celle de la proposition III.12. □

Théorème III.20. *Soit $k \geq 2$ un entier. Alors $cl(S(D_k))$ admet une base finie.*

Tous les résultats d'énumération obtenus dans [2] pour la cloture cyclique sont aussi valides pour la cloture cylindrique.

Théorème III.21. *$cl(S_{2k-1}(D_k))$ est énuméré par $(2k-1)! - (2k-1)c_{k-1}$ ou $(c_k)_{k \geq 1}$ est la suite de Catalan.*

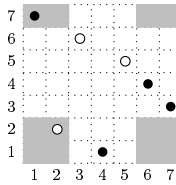
III.3.2 Discussion et Conclusion

Dans ce paragraphe, on donne des résultats généraux concernant la cloture torique $tr(\mathcal{C})$ pour une classe \mathcal{C} de permutations, i.e. $tr(\mathcal{C}) = cl(cc(\mathcal{C})) = cc(cl(\mathcal{C}))$. Soit $f_{u,v}$, $1 \leq u, v \leq n$, les fonctions définies sur S_n par $f_{u,v}(\sigma) = \sigma'$ où $\sigma'_j = (\sigma_{(u+j-2) \bmod (n)+1 - v}) \bmod (n) + 1$, pour $j \in [1..n]$. L'ensemble $\{f_{u,v}(\sigma), 1 \leq u, v \leq n\}$ contient exactement toutes les rotations toriques de σ puisque la permutation $f_{u,v}(\sigma)$ est égale à la permutation $r^{n-u+1}(\rho^{n-v+1}(\sigma))$.

Maintenant supposons que $\mathcal{C} = S(B)$ où B est un ensemble fini de permutations. Soit θ un motif (relativement à B) dans $\sigma \in \mathcal{C}$. L'*aire témoin* $W''(\theta)$ de θ dans σ est le produit direct de $\sigma^{-1}(W(\theta))$ de θ avec l'intervalle témoin $W'(\theta)$: $W''(\theta) = \sigma^{-1}(W(\theta)) \times W'(\theta)$. Par exemple, la permutation **7261543** contient le motif **132** ($\theta = 265$), $W(\theta)$ est le segment **4372**, alors $\sigma^{-1}(W(\theta)) = \{6, 7, 1, 2\}$, $W'(\theta)$ est l'intervalle **712**, et $W''(\theta)$ est l'aire $\{6, 7, 1, 2\} \times \{7, 1, 2\}$. Voir la figure III.6 pour une illustration.

On obtient alors un résultat similaire aux résultats obtenus précédemment concernant l'appartenance d'une permutation à la cloture torique d'une classe.

FIGURE III.6 : L'aire témoin $W''(265)$ pour la permutation 7261543.



Lemme III.22. $\sigma \notin tr(\mathcal{C})$ si et seulement si les aires témoins couvrent $[n] \times [n]$ où n est la longueur de σ .

Proposition III.23. Soit $\mathcal{C} = S(B)$, où B est de cardinalité finie ; supposons qu'il existe une borne Δ dépendante de B seulement telle que, pour tout $\sigma \notin tr(\mathcal{C})$, il y a une collection d'au plus Δ aires témoins qui couvrent $[n] \times [n]$. Alors $tr(\mathcal{C})$ a une base finie.

Nous avons étudié la base pour la cloture de $tr(S(321))$. Des calculs expérimentaux suggèrent que $tr(S(321))$ a une base finie. De plus la base de $tr(S(321))$ contient probablement une permutation minimale de longueur 5, 2 de longueur 7, 2 de longueur 8, 39 de longueur 9 et 2 de longueur 10.

Cependant, nous nous sommes intéressés à prouver ce résultat. Il semblerait que la preuve ait été forcée mais je préfère ne pas présenter celle ci pour les raisons suivantes. La preuve demande l'étude de beaucoup de cas et chacun d'eux induisent des sous-cas assez lourds à expliciter. En attendant l'obtention d'une preuve élégante de ce résultat, si elle existe, je considère que ce problème n'est pas encore résolu. Je propose maintenant trois questions ouvertes.

Problème 1 : Est-ce que $tr(S(321))$ a une base finie ?

Problème 2 : Est-ce que $tr(S(231))$ a une base finie ?

Problème 3 : Plus généralement, soit $k \geq 2$ un entier ; est-ce que $tr(S(D_k))$ a une base finie ?

Il reste cependant de nombreuses questions en suspens notamment dans le domaine de l'énumération des classes qui sont clotures toriques d'une classe de permutations à motifs exclus.

Chapitre IV

Perspectives

J'ai exposé dans ce mémoire les principaux travaux de recherche concernant : *la génération exhaustive de classes d'objets combinatoires, l'étude de structures en treillis, et l'étude des motifs dans les permutations.*

Je propose ci-dessous quelques exemples de problèmes encore ouverts concernant les domaines traités dans ces trois chapitres.

Génération exhaustive

Trouver un algorithme permettant de générer efficacement les permutations de taille n ayant un nombre donné de descentes (même question en imposant que la liste soit un code de Gray).

Trouver un algorithme permettant de générer efficacement en code de Gray les permutations de taille n ayant un nombre donné d'excédences.

Trouver un algorithme permettant de générer en code de Gray optimal les ensembles $S_{2n}(321)$ et $S_{2n}(312)$.

Construire un paquetage Maple (ou autre) permettant d'implanter tous les algorithmes obtenus.

Structure en treillis

Poursuivre les recherches concernant l'obtention d'un algorithme permettant de calculer en temps polynomial la distance de rotation entre deux arbres dans le treillis de Tamari.

Exhiber des algorithmes permettant de calculer en temps polynomial la distance entre deux arbres dans les treillis 'phagocyte' et le treillis 'taille-greffe'.

Résoudre la conjecture énoncée dans ce mémoire : Si $v(T)$ est la longueur du plus long chemin entre $\mathbf{1}$ et T alors on conjecture que $v(T) + v(T') \leq v(T \vee T') + v(T \wedge T')$ et si $T < T'$ alors $v(T) < v(T')$. Si tel est le cas, alors $d(T, T') = v(T) + v(T') - 2v(T \vee T')$ serait une distance sur ce treillis.

Enumérer le nombre d'intervalles dans les deux nouveaux treillis.

Trouver un algorithme efficace non-récuratif pour calculer la fonction de Möbius du treillis 'taille-greffe' et prouver qu'elle prend ses valeurs dans $\{-1, 0, +1\}$.

Motifs dans les permutations

Trouver un algorithme efficace permettant de trouver la permutation π qui minimise la somme $d(\pi, \sigma_1) + d(\pi, \sigma_2)$ où $d(\pi, \sigma)$ est le nombre minimum de WM-duplications nécessaires pour transformer π en σ .

Caractériser la classe de permutations à motifs exclus correspondante aux permutations obtenues à partir de W ou WM-duplications.

Montrer que la cloture torique de $S(321)$ est à base finie. Même question pour $S(231)$.

Examiner la finitude de la base de la cloture torique de $S(k(k-1) \dots 321)$.

Autres directions de recherche

Continuer à explorer en terme de permutation des problèmes issus de la bioinformatique (duplication de gène).

Etudier certains problèmes combinatoires issus du domaine de l'Image (tomographie).

Annexes

Liste des tableaux

I.1	Complexité moyenne pour la génération de chaque classe.	15
I.2	Les listes $\mathcal{L}_{4,2}$ et $\mathcal{L}_{4,3}$. Les modifications de bits sont en gras.	17
I.3	Les listes \mathcal{D}_4 et \mathcal{D}_5 . Dans \mathcal{D}_5 les sous-listes $\phi(i, \mathcal{D}_4)$ et $\psi(i, \mathcal{D}_3)$, $1 \leq i \leq 4$, sont respectivement en gras et en italiques.	19
I.4	Les listes $\mathcal{S}_{3,k}$, $1 \leq k \leq 3$, et $\mathcal{S}_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$. Par exemple, dans $\mathcal{S}_{4,2}$ les sous-listes de la relation (d) , $\psi(1, \mathcal{S}_{3,2})$, $\psi(3, \mathcal{S}_{3,2})$, $\phi(\mathcal{S}_{3,1})$ et $\psi(2, \mathcal{S}_{3,2})$, sont alternativement en gras et italique.	21
I.5	Les listes $\mathcal{S}_{4,2}$ et $\mathcal{T}_{4,2}$. Chaque suite dans $\mathcal{T}_{4,2}$ est le tableau de transpositions de la permutation correspondante dans $\mathcal{S}_{4,2}$	23
I.6	Les listes $\mathcal{S}_{3,k}$, $1 \leq k \leq 3$, et $\mathcal{S}_{4,k}$ pour $1 \leq k \leq 4$. Par exemple, dans $\mathcal{S}_{4,2}$ les sous-listes de la relation (d) , $\psi(3, \mathcal{S}_{3,2})$, $\phi(\mathcal{S}_{3,1})$, $\psi(1, \mathcal{S}_{3,2})$, et $\psi(2, \mathcal{S}_{3,2})$, sont alternativement en gras et en italique.	27
I.7	Les codes de Gray optimaux pour $\mathcal{S}_5(312)$ et $\mathcal{S}_5(321)$. Deux éléments consécutifs diffèrent en au plus trois positions.	31
I.8	Classes de permutations évitant les motifs de T avec leur fonctions de succession $\chi_T(i, k)$. On donne aussi les différents lemmes utilisés pour la preuve du code de Gray. On compare aussi les nombres maximum des différences de position entre deux permutations consécutives dans [67] et dans notre code de Gray B . Un point dans la dernière colonne signifie qu'il n'y a pas de code de Gray connu pour cette classe dans la littérature.	32

Table des figures

I.1	Algorithme de génération pour les permutations avec un nombre fixé d'ex- cédences et les listes $E_{4,1}$, $E_{4,2}$ et $E_{5,1}$	10
I.2	Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération codé par les mots de Fibonacci 3-généralisés.	12
I.3	Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération de (Ω_3) codé par les per- mutations de Fibonacci 3-généralisées $S_n(321, 312, 2341)$. Les sites actifs sont représentés en soulignés.	12
I.4	Les cinq premiers niveaux de l'arbre de génération de (Φ_3) . Chaque noeud est codé par une permutation de Lucas dans $S_n(321, 312, 2341, \overline{1342}:65, \overline{132}:564)$	14
I.5	La liste \mathcal{D}_n : (a) n est pair, (b) n est impair.	19
I.6	Les relations (b) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point i correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})$ et chaque point encerclé i représente la liste $\overline{\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})}$, <i>i.e.</i> , la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1,1})$ dans l'ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,1} =$ $\psi(7, \mathcal{S}_{7,1}) \circ \psi(5, \mathcal{S}_{7,1}) \circ \overline{\psi(3, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \psi(1, \mathcal{S}_{7,1}) \circ \overline{\psi(2, \mathcal{S}_{7,1})} \circ \psi(4, \mathcal{S}_{7,1}) \circ \overline{\psi(6, \mathcal{S}_{7,1})}$	25
I.7	Les relations (c) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi'(i, \mathcal{S}_{n-1, n-1})$ et le point 0 représente la liste $\phi'(\mathcal{S}_{n-1, n-2})$. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,7} = \psi'(8, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \phi'(\mathcal{S}_{7,6}) \circ \psi'(6, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(4, \mathcal{S}_{7,7}) \circ$ $\psi'(2, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(3, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(5, \mathcal{S}_{7,7}) \circ \psi'(7, \mathcal{S}_{7,7})$	25
I.8	Les relations (d) pour $n = 8$ et $n = 9$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1, n-2})$ et le point 0 est la liste $\phi(\mathcal{S}_{n-1, n-3})$. Quand le point est encerclé, on considère la liste en ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ alors $\mathcal{S}_{8,6} = \psi(7, \overline{\mathcal{S}_{7,6}}) \circ \overline{\phi(\mathcal{S}_{7,5})} \circ \psi(5, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \psi(3, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \psi(1, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\psi(2, \mathcal{S}_{7,6})} \circ$ $\psi(4, \mathcal{S}_{7,6}) \circ \overline{\psi(6, \mathcal{S}_{7,6})}$	26
I.9	Les relations (e) pour $n = 8, 9$ et $k = 3, 4$. Chaque point $i \neq 0$ correspond à la liste $\psi(i, \mathcal{S}_{n-1, k})$ et le point 0 est la liste $\phi(\mathcal{S}_{n-1, k-1})$. Quand le point est encerclé, on considère la liste en ordre inverse. Par exemple, si $n = 8$ et $k = 4$ alors $\mathcal{S}_{8,4} = \psi(7, \overline{\mathcal{S}_{7,4}}) \circ \overline{\psi(5, \mathcal{S}_{7,4})} \circ \phi(\mathcal{S}_{7,3}) \circ \overline{\psi(3, \mathcal{S}_{7,4})} \circ \psi(1, \mathcal{S}_{7,4}) \circ$ $\overline{\psi(2, \mathcal{S}_{7,4})} \circ \psi(4, \mathcal{S}_{7,4}) \circ \overline{\psi(6, \mathcal{S}_{7,4})}$	27
I.10	Si $k = 7$ alors $\Pi(\sigma^1)$ est la liste $\phi(3, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(6, \sigma)^1, \phi(4, \sigma)^0, \phi(2, \sigma)^1, \phi(1, \sigma)^1$; si $k = 8$, $\Pi(\sigma^1)$ est $\phi(3, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(8, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(2, \sigma)^0, \phi(1, \sigma)^1$. Chaque point (resp. point encerclé) étiqueté par $\ell \in [1..k]$ représente $\phi(\ell, \sigma)^1$ (resp. $\phi(\ell, \sigma)^0$).	28
I.11	Si $k = 7$ alors $\Pi'(\sigma^1)$ est la liste $\phi(2, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(7, \sigma)^1, \phi(5, \sigma)^0, \phi(3, \sigma)^1, \phi(1, \sigma)^1$; si $k = 8$, $\Pi'(\sigma^1)$ est $\phi(2, \sigma)^0, \phi(4, \sigma)^1, \phi(6, \sigma)^0, \phi(8, \sigma)^1, \phi(7, \sigma)^0, \phi(5, \sigma)^1, \phi(3, \sigma)^0, \phi(1, \sigma)^1$. Chaque point (resp. point encerclé) étiqueté par $\ell \in [1..k]$ représente $\phi(\ell, \sigma)^1$ (resp. $\phi(\ell, \sigma)^0$).	29

II.1	La représentation canonique du mot de Dyck $w \in D_9$	35
II.2	Le treillis phagocyte D_4	35
II.3	Une transformation 'phagocyte' $w \rightarrow w_1$; $\pi_w = 19/23/45/678$ et $\pi_{w_1} = 19/23678/45$	36
II.4	Trois transformations de taille-greffe dans B_7	40
II.5	Le treillis 'taille-greffe' B_4 . Chaque arbre est codé par ses suite de profondeurs et de distribution.	42
II.6	Le treillis 'taille-greffe' B_5 . Chaque arbre est codé par ses suites des profondeurs et de distribution.	43
II.7	La rotation sur les arbres binaires.	45
II.8	Une bascule de diagonale dans \mathcal{T}_8	46
II.9	Quatre normalisations $T \in \mathcal{T}_6$	46
III.1	Une WM-duplication de la permutation 5421673. Les points encadrés sont supprimés lors de la procédure de perte.	52
III.2	Décomposition $\sigma = \tau\tau'$ et la permutation S obtenue après le processus de la preuve du Théorème III.3. On a $\tau = 11\ 6\ 5\ 10\ 3$, $\tau' = 9\ 8\ 1\ 7\ 4\ 2$, u_1 est vide, $d_1 = 11\ 6\ 5$, u_2 est vide, $d_2 = 10\ 3$, u_3 est vide, $d_3 = 9\ 8\ 1$, u_4 est vide, $d_4 = 7\ 4\ 2$ et, $D_2 = 10\ 3$, $U_2 = 1\ 8\ 9$; $D_1 = 11\ 6\ 5$; $U_1 = 2\ 4\ 7$. Donc $S = U_1D_1U_2D_2 = 2\ 4\ 7\ 11\ 6\ 5\ 1\ 8\ 9\ 10\ 3$	55
III.3	Etiquetage des parcours montant et descendant de $\sigma = 231684597$ avec le code de Gray réfléchi. Exemple de chemin de WM-duplications à partir de l'identité vers σ	58
III.4	La structure spéciale d'une permutation $\sigma \notin S(D_k)$. Une aire remplie ne contient pas de point de la forme (i, σ_i) , $1 \leq i \leq n$. Une suite de j diagonales croissantes dans une aire signifie que l'aire ne contient pas de motif $(j+1)j \dots 21$	62
III.5	Les cinq permutations σ commençant par 7 telles que $\sigma \notin cc(S_7(D_4))$: 7654321 , 7216543 , 7165432 , 7615432 , 7261543 . Le motif le plus à gauche θ est illustré en gras dans la notation linéaire de σ et illustré par des points vides dans la représentation ci-dessous. Les bons parenthésages correspondant sont respectivement $((()))$, $((())())$, $((()()))$, $(())(())$ et $(())(())$	64
III.6	L'aire témoin $W''(265)$ pour la permutation 7261543.	66

Liste des publications

Revue internationale

1. J.-L. Baril, J.-M. Pallo, Matchings in three Catalan lattices, *Intern. J. Computer Math.*, Vol. 80(2), pp. 193-200, 2003.
2. J.-L. Baril, Gray code for Cayley permutations, *Computer Science Journal of M.*, Vol. 11 (2), pp. 124-136, 2003.
3. J.-L. Baril, V. Vajnovszki, Gray Code for Derangements, *Discrete Applied Mathematics*, Vol. 140 (1-3), pp. 207-221, 2004.
4. J.-L. Baril, V. Vajnovszki, Minimal change list for Lucas Strings and some graph theoretic consequences, *Theoretical Computer Science*, A dedicated to the memory of Alberto Del Lungo, Vol. 346 (2-3), pp. 189-199, 2005.
5. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Irregularity strength of circulant graphs, *Discrete Math.*, Vol. 304 (1-3), pp. 1-10, 2005.
6. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of meshes and hypercubes, *Australasian Journal of Combinatorics*, Vol. 35, pp. 89-102, 2006.
7. J.-L. Baril, J.-M. Pallo, The Phagocyte Lattice of Dyck Words, *Order*, Vol 23(2-3), pp. 97-107, 2006.
8. J.-L. Baril, J.-M. Pallo, Efficient lower and upper bounds of the diagonal-flip distance between triangulations, *Information Processing Letters*, Vol. 100, pp. 131-136, 2006.
9. J.-L. Baril, Gray code for permutations with a fixed number of cycles, *Discrete Math.*, Vol. 307, pp. 1559-1571, 2007.
10. J.-L. Baril, Hamiltonian paths for involutions in the square of a Cayley graph, *Journal of Discrete Mathematical Sciences & Cryptography*, Vol. 10(2), 2008.
11. J.-L. Baril, P.-T. Do, ECO-generation for p-generalized Fibonacci and Lucas permutations, *Journal of Pure Mathematics and Applications*, Vol. 17(1-2), pp. 19-37, 2006.
12. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Vertex distinguishing edge- and total-colorings of cartesian and other product graphs, A paraître dans *Ars Combinatoria*, 2010.
13. J.-L. Baril, J.-M. Pallo, The pruning-grafting lattice of binary trees, *Theoretical Computer Science*, Vol. 409(3), pp. 382-293, 2008.
14. J.-L. Baril, C. Moreira Dos Santos, Gray code for compositions of n with parts 1 and p, *Advances and Applications in Discrete Mathematics*, Vol. 3(1), pp. 67-84, 2009.
15. J.-L. Baril, More restrictive Gray codes for some classes of pattern avoiding permutations, *Information Processing Letters*, Vol. 109, pp. 799-804, 2009.
16. J.-L. Baril, O. Togni, Neighbor-distinguishing k-tuple edge-colorings of graphs, *Discrete Mathematics*, Vol. 309(16), pp. 5147-5157, 2009.
17. J.-L. Baril, Efficient generating algorithm for permutations with a fixed number of ex-

cedances, *Pure Mathematics and Applications/Algebra and Theoretical Computer Science*, Vol 19(3-4), pp. 61-70, 2009.

18. J.-L. Baril, Gray code for permutations with a fixed number of left-to-right minima, A paraître dans *Ars Combinatoria*, 2010.

19. J.-L. Baril, R. Vernay, Whole mirror duplication-random loss model and pattern avoiding permutations, *Information Process. Letters*, Vol. 110, pp. 474-480, 2010.

20. J.-L. Baril, Cyclic and lift closures of $S_n(k(k-1) \dots 321)$., Submitted 2010

Livres

J.-L. Baril, M. Poneti, *Pure Mathematics and Applications/ Algebra and Theoretical Computer Science*, Firenze, 2008.

Conferences internationales

1. J.-L. Baril, V. Vajnovszki, Gray codes for order p Lucas strings, *Proceedings of the 4th International Conference on Combinatorics on Words*, September 2003, Turku, Finland (ed. Tero Harju and Juhani Karhumaki), pp. 149-158. TUCS General Publication, No 27, August 2003.

2. J.-L. Baril, P.-T. Do, Generalized Fibonacci permutations generation by the ECO method, *Conference on Combinatorics, Automata and Number Theory*, Liège, 8-19 May 2006.

3. J.-L. Baril, P.-T. Do, ECO generation for Fibonacci and Lucas permutations, *Gascom'06*, Dijon, 12-15 September 2006.

4. J.-L. Baril, Gray code for permutations with exactly k-cycles, *Gascom'06*, Dijon, 12-15 September 2006.

5. J.-L. Baril, A CAT algorithm for generating permutations with a fixed number of excedances, *Gascom'08*, Dedicated to Jean-Guy Penaud on the occasion of his 65th birthday, Bibbiena, Italy, 16-20 June 2008.

6. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, VD-colorings of product graphs, *Gascom'08*, Dedicated to Jean-Guy Penaud on the occasion of his 65th birthday, Bibbiena, Italy, 16-20 June 2008.

7. J.-L. Baril, C. Moreira Dos Santos, More restrictive Gray code for (1,p)-compositions and relatives, *Journées Montoises d'Informatique Théorique*, UMH, Université de Mons-Hainaut, Belgique, 28 août 2008.

8. J.-L. Baril, P.-T. Do, ECO generation for compositions and their restrictions, *Pattern permutations*, University of Otago, New Zealand, 16 - 20 June, 2008.

9. J.-L. Baril, P.-T. Do, Efficient generating algorithms for some combinatorial object classes. *Combinatorics and Statistical Mechanics, Erwin Schrödinger International Institute for Mathematical Physics*, Vienna, Austria, July 2008.

10. J.-L. Baril, R. Vernay, Whole mirror duplication-random loss model and pattern avoiding permutations, *Pattern permutations*, University of Firenze, Italy, 13 - 17 July, 2009.

Conférences nationales

1. J.-L. Baril, V. Vajnovszki, Hamiltonisme du cube de Lucas d'ordre p , *Journées Graphes 2003*, Dijon.
2. J.-L. Baril, H. Kheddouci, O. Togni, Force d'irrégularité des graphes circulants, *Journées Graphes 2003*, Dijon.
3. J.-L. Baril, R. Vernay, Autour de la duplication du génome, *EJCIM' 09*, Clermont, 2009.

Citations de mes travaux

Listes des auteurs citant mes travaux

Barcucci E. :[19],	Luccio F. :[22],
Baskoro E.T. :[20],	Mansour T. :[29,33,34],
Batut Ch. :[5,9],	Martinet J. :[41,6],
Bergé A.M. :[11],	Nawawi M.S. :[20],
Bernini A. :[18,21,19],	Nassar G. :[33],
Cleary S. :[22,38,37],	Noy M. :[35],
Cuckler B. :[30],	Nurdin :[20],
Diaconis P. :[28],	Omana-Pulido E. :[35],
Domaratzki M. :[14],	Pagli L. :[22],
Dukes W.M.B. :[29],	Pergola E. :[21],
Dutour-Sikiric M. :[17],	Pinzani R. :[21],
Flanagan M.F. :[29],	Poneti M. :[40,19],
Fulman J. :[28],	Rucinski A. :[16],
Grazzini E. :[21],	Schürmann A. :[13,17],
Greenhill C. :[16],	Sloane N.J.A. :[2,4],
Guralnick R. :[28],	St-John K. :[38,37],
Kokosinski Z. :[25],	Stojmenovic I. :[15],
Huemer C. :[35],	Tong C. :[36,43],
Hurtado F. :[35],	Vallentin F. :[13,17],
Jezek J. :[3],	Vajnovszki V. :[23,24,29,40,26,27],
Juarna A. :[23],	Wang D. :[32],
Kim Y. :[42],	Wang L. :[43],
Korsh J. :[12],	Wang X. :[32],
Lafayette P.S. :[12],	Yang Y. :[36,43],
Laihem M. :[11],	Zhang S. :[32],
Lazenik F. :[30],	Zhihe L. :[36],
Li S. :[32],	
Lin X. :[36,43],	

Liste des publications citant mes travaux

1. J. MARTINET, <http://www.math.u-bordeaux.fr/~martinet>
2. N.J.A. SLOANE, <http://www.research.att.com/njas/lattices/perfect.html>

3. J. JEZEK, <http://www.karlin.mff.cuni.cz/jezek>.
4. N.J.A. SLOANE, *Eulerian Numbers, A000295*, <http://www.research.att.com/njas/sequences/>
5. CH. BATUT, J. MARTINET, *Radiographie des réseaux parfaits*, *Experimental Mathematics*, 3(1), 39-49, 1994.
6. J. MARTINET, *Les réseaux parfaits dans les espaces euclidiens*. Editions Dunod, 1996.
7. J. MARTINET, *Une famille de réseaux dual-extrêmes*, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 9, 169-181, 1997.
8. J. MARTINET, *Algebraic Constructions of Lattices ; Isodual Lattices*, *Acts of the 1996 Eger conference*, Györy, Pethö, Sós, eds, Walter de Gruyter GmbH, Berlin-New York, pp. 349 - 360, 1998.
9. CH. BATUT, *Classification of quintic eutactic forms*, *Math. Comp.* 70, 395-417, 2001.
10. J. MARTINET, *Perfect lattices in euclidean spaces*. Springer-Verlag, 2002.
11. A.-M. BERGÉ, M. LAIHEM, *Lattices with a prescribed hyperplane perfect section*, *preprint*, 2002.
12. J. KORSH, P. S. LAFOLETTE, *Constant time generation of derangements*, *Inf. Process. Lett.*, 90 (4), 181-186, 2004.
13. A. SCHÜRMAN, F. VALLENTIN, *Methods in the local theory of packing and covering lattices*, *arXiv :math.MG/0412320v1*, 2004.
14. M. DOMARATZKI, *Trajectory based operations*, *Thesis*, Queen's University, Kingston, Ontario, Canada, 2004.
15. I. STOJMENOVIC, *Listing combinatorial objects in parallel*, *The international Journal of Parallel, Emergent and Distributed Systems*, 21 (2), 127-146, 2006.
16. C. GREENHILL, A. RUCINSKI, *Neighbour-distinguishing edge colorings of random regular graphs*, *The electronic journal of combinatorics*, 13, R77, 1-12, 2006.
17. M. DUTOUR SIKIRIC, A. SCHÜRMAN, F. VALLENTIN, *Classification of eight dimensional perfect forms*, *Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc.* 13, 21-32. math/0609388, 2007.
18. A. BERNINI, *Some properties of pattern avoiding permutations*, *Thèse*, Florence, Italie, 2006.
19. E. BARCUCCI, A. BERNINI, M. PONETI, *From Fibonacci to Catalan permutations*, *Journal of Pure Mathematics and Applications*, Vol. 17(1-2), pp. 1-17., 2006.
20. NURDIN, BASKORO E.T., NAWAWI M.S.A., *The total edge irregular strengths of union graphs of $K_{2,n}$* , *International Conference on Mathematics and Natural Sciences*, 2006.
21. A. BERNINI, E. GRAZZINI, E. PERGOLA, R. PINZANI, *A general exhaustive generation algorithm for Gray structures*, *Acta Informatica*, vol. 44, 5, 361-376, 2007.
22. S. CLEARY, F. LUCCIO, L. PAGLI, *Refined upper bounds for right-arm rotation distances*, *Theoretical Computer Science*, 377, 277-281, 2007.
23. A. JUARNA, V. VAJNOVSZKI, *Some Generalizations of a Simion-Schmidt Bijection*, *The Computer Journal*, 50(5), 574-580, 2007.

24. V. VAJNOVSZKI, *Gray code order for Lyndon words*, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 9 (2), 145-152, 2007.
25. Z. KOKOSINSKI, *On parallel generation of partial derangements, derangements and permutations*, *Proc. 7th Int. Conference "Parallel Processing and Applied Mathematics" PPAM'2007, Gdansk, Poland [in :] Lecture Notes in Computer Science*, 2008.
26. V. VAJNOVSZKI, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 9,2,145-152, 2007.
27. V. VAJNOVSZKI, *More restrictive Gray codes for necklaces and Lyndon words*, *IPL*, 106, 3, 96-99, 2007.
28. P. DIACONIS, J. FULMAN, R. GURALNICK, *On fixed points of permutations*, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 2008.
29. W.M.B. DUKES, M.F. FLANAGAN, T. MANSOUR, V. VAJNOVSZKI, *Combinatorial Gray code for classes of pattern avoiding permutations*, *Theoretical computer science*, vol. 396, 1-3, 35-49, 2008.
30. B. CUCKLER, F. LAZEBNIK, *Irregularity Strength of Denses Graphs*, *journal of graph theory*, 58, 4, 299-313, 2008.
31. JACQUES MARTINET, *Anne-Marie Bergé - In Memoriam*, *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, Vol. 20, i-xi, 2008.
32. D. WANG, X. WANG, S. LI, S. ZHANG, *Diagonal-flip distance algorithms of three type triangulations*, *International conference on computer science and software engineering, Wuhan, China, IEEE*, 2008.
33. T. MANSOUR, G. NASSAR, *Gray codes, Loopless algorithm and partitions*, *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms* 7 :3, 291-310, 2008.
34. S. HEUBACH, T. MANSOUR, *Combinatorics of compositions and words*, *Discrete Mathematics and its Applications*, Chapman and Hall Book, Taylor and Francis Group, 2008.
35. C. HUEMER, F. HURTADO, M. NOY, E. OMANA-PULIDO, *Gray codes for non-crossing partitions and dissections of a convex polygon*, *Discrete Applied Mathematics*, 157, 7, 1509-1520, 2009.
36. C. TONG, X. LIN, Y. YANG, L. ZHIHE, *Equitable total coloring of $C_m \square C_n$* , *Discrete Applied Mathematics*, 157, 596-601, 2009.
37. S. CLEARY, K. ST. JOHN, *A Linear-Time Approximation Algorithm for Rotation Distance*, *arXiv :math.CO/09030199v1*, 2009.
38. S. CLEARY, K. ST. JOHN, *Rotation Distance is Fixed-Parameter Tractable*, *arXiv :math.CO/09030197v1*, 2009.
39. F. LUCCIO, L. PAGLI, *The Fermat star of binary trees*, *Information Processing Letters*, 109, 11, 568-571, 2009.
40. M. PONETI, V. VAJNOVSZKI, *Generating restricted classes of involutions, Bell and Stirling permutations*, *European Journal of Combinatorics*, 2009.
41. J. MARTINET, *Compléments pour le livre : Les réseaux parfaits dans les espaces euclidiens*. Editions Dunod, 2009.

42. Y. KIM, *On semistability of root lattices and perfect lattices*, 2010.
43. C. TONG, X. LIN., Y. YANG, L. WANG., *Irregular total labellings of some families of graphs*, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 40 (3), 155-181, 2009.

Bibliographie

- [1] S.G. Akl, A new algorithm for generating derangements, *BIT*, 20 (1980), 2–7.
- [2] M.H. Albert, R.E.L. Aldred, M.D. Atkinson, H.P. van Ditmarsch, C.C. Handley, D.A. Holton, D.J. McCaughan and C.W. Monteith, Cyclically closed pattern classes of permutations, *Australasian Journal of Combinatorics*, 38 (2007), 87–100.
- [3] R. Arratia, On the stanley-Wilf conjecture for the number of permutations avoiding a given pattern, *Electronic J. Combin.*, 1 (1999), N1.
- [4] M.D. Atkinson, Restricted permutations, *Discrete Math.*, 195 (1998), 27–38.
- [5] M.D. Atkinson and T. Stitt, Restricted permutations and the wreath product, *Discrete Math.*, 259 (2002), 19–36.
- [6] S. Bacchelli, E. Barucci, E. Grazzini and E. Pergola, Exhaustive Generation of Combinatorial Objects by ECO, *Acta Informatica*, 40 (2004), 585–602.
- [7] C. Banderier, P. Flajolet, D. Gardy, M. Bousquet-Melou, A. Denise, and D. Gouyou-Beauchamps. Generating functions for generating trees. *Discrete Mathematics*, 246 (2002), 29–55.
- [8] E. Barucci, A. Bernini, L. Ferrari, M. Poneti, A distributive lattice structure connecting Dyck paths, noncrossing partitions and 312-avoiding permutations, *Order*, 22(4) (2005), 311–328.
- [9] E. Barucci, A. Del Lungo, E. Pergola and R. Pinzani, A methodology for the enumeration of combinatorial objects, *Disc. Journal of Difference Equations and Applications*, 5 (1999), 435–490.
- [10] E. Barucci, A. Del Lungo, E. Pergola and R. Pinzani, From Motzkin to Catalan permutations, *Discrete Mathematics*, 217(1-3) (2000), 33–49.
- [11] E. Barucci, A. Bernini and M. Poneti, From Fibonacci to Catalan permutations, *PuMA*, 17(1-2) (2006), 1–17.
- [12] E. Barucci, A. Del Lungo, and E. Pergola. Random generation of trees and other combinatorial objects. *Theoretical Computer Science*, 218(2) (1999), 218–232.
- [13] E. Barucci, A. Del Lungo, E. Pergola, and R. Pinzani. A methodology for plane tree enumeration. *Discrete Mathematics*, 180 (1998), 45–64.
- [14] E. Barucci, A. Del Lungo, E. Pergola, and R. Pinzani. Directed animals, forests of trees and permutations. *Discrete Mathematics*, 204 (1999), 41–71.
- [15] E. Barucci, A. Del Lungo, E. Pergola, and R. Pinzani. ECO : a methodology for the enumeration of combinatorial objects. *Journal of Difference Equations and Applications*, 5 (1999), 435–490.

- [16] J.L. Baril and P.T. Do. p -Generalized Fibonacci permutations generation by the ECO method. *CANT06*, (2006), May 8 - 19.
- [17] J.L. Baril, P.T. Do. ECO-generation for p -generalized Fibonacci and Lucas permutations, *Journal of Pure Mathematics and Applications*, 17(1-2) (2006), 19–37.
- [18] J.L. Baril, J.M. Pallo, Matchings in three Catalan lattices, *Intern. J. Computer Math.*, 8 (2003), 193–200.
- [19] J.-L. Baril, Gray code for permutations with a fixed number of cycles, *Disc. Math.*, 30(13) (2007), 1559–1571.
- [20] J.L. Baril, Efficient generating algorithm for permutations with a fixed number of excedances, *Pure Mathematics and Applications/Algebra and Theoretical Computer Science*, 19(3-4) (2009), 61–70.
- [21] J.L. Baril, J.M. Pallo, The phagocyte lattice of Dyck words, *Order*, 23(2-3) (2006), 97–107.
- [22] J.L. Baril, J.M. Pallo, Efficient lower and upper bounds of the diagonal-flip distance between triangulations, *Inform. Process. Lett.*, 100 (2006), 131–136.
- [23] J.-L. Baril and V. Vajnovszki, Gray codes for order p Lucas strings, *Proceedings of the 4th International Conference on Combinatorics on Words*, Turku, Finland (ed. Tero Harju and Juhani Karhumäki), 149-158. TUCS General Publication, No 27, August 2003.
- [24] J.L. Baril and V. Vajnovszki. Minimal change list for Lucas strings and some graph theoretic consequences. *Theoretical Computer Science.*, 346 (2005), 189–199.
- [25] J.-L. Baril, Gray code for permutations with a fixed number of left-to-right minima, *A paraître dans Ars Combinatoria*, 2010.
- [26] J.-L. Baril, More restrictive Gray codes for some classes of pattern avoiding permutations, *Information Processing Letters*, 109 (2009), 799–804.
- [27] J.-L. Baril, H. Kheddouci and O. Togni, Irregularity strength of circulant graphs, *Discrete Math.*, 304(1-3) (2005), 1–10.
- [28] J.-L. Baril, H. Kheddouci and O. Togni, Adjacent vertex distinguishing edge-colorings of meshes and hypercubes, *Australasian Journal of Combinatorics*, 35 (2006), 89–102.
- [29] J.-L. Baril, H. Kheddouci and O. Togni, Vertex distinguishing edge- and total-colorings of cartesian and other product graphs, To be published in *Ars Combinatoria*, 2010.
- [30] J.-L. Baril, Olivier Togni, Neighbor-distinguishing k -tuple edge-colorings of graphs, *Discrete Mathematics*, 309(16) (2009), 5147–5157.
- [31] J.L. Baril and V. Vajnovszki. Gray code for derangements. *Discrete Appl. Math.*, 140(1-3) (2004), 207–221.
- [32] J.P. Barthélemy, B. Leclerc, B. Monjardet, On the use of ordered sets on problems of comparison and consensus of classifications, *Journal of Classification*, 3 (1986), 187–224.
- [33] B. Bauslaugh and F. Ruskey, Generating alternating permutations lexicographically, *BIT*, 30 (1990), 17–26.
- [34] O. Bernardi, N. Bonichon Catalan’s intervals and realizers of triangulations, *FPSAC*, (2007), Tianjin, China.

- [35] A. Bernini, E. Grazzini, E. Pergola and R. Pinzani, A general exhaustive generation algorithm for Gray structures, *Acta Informatica*, 44(5) (2007), 361–376.
- [36] S. Bérard, A. Bergeron, C. Chauve, and C. Paul, Perfect sorting by reversals is not always difficult, *IEEE ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, 4(1) (2007), 4–16.
- [37] J. R. Bitner, G. Ehrlich, and E. M. Reingold, Efficient generation of the binary reflected Gray code and its applications, *Communications of the ACM*, 19(9) (1976), 517–521.
- [38] M. Bóna, Permutations avoiding certain patterns; the case of length 4 and generalizations. *Discrete Math.*, 175(1-3) (1997), 55–67.
- [39] M. Bóna, Combinatorics of Permutations, *Chapman & Hall*, 2004.
- [40] A. Bonnini and J.M. Pallo, A shortest path metric on unlabeled binary trees, *Pattern Recognition Lett.* 13 (1992), 411–415.
- [41] S.A. Boorman, D.C. Olivier, Metrics on spaces of finite trees, *Journal of Mathematical Psychology*, 10 (1973), 26–59.
- [42] M. Bouvel and E. Pergola, Posets and permutations in the duplication-loss model, *Pure Math. and Appl.*, 2009.
- [43] M. Bouvel and D. Rossin, A variant of the tandem duplication-random loss model of genome rearrangement, *Theoretical Computer Science*, 410(8-10) (2009), 847–858.
- [44] S. Brlek, E. Duchi, E. Pergola, and S. Rinaldi. On the equivalence problem for succession rules. *Discrete Math.*, 298 (2005), 142–154.
- [45] A. Burstein, Enumeration of words with forbidden patterns, *Ph.D. thesis, University of Pennsylvania*, 1998.
- [46] E. R. Canfield and H. S. Wilf, Counting permutations by their alternating runs, *Journal of Combinatorial Theory*, 115 (2008), 213–225.
- [47] F. Chapoton, Sur le nombre d’intervalles dans les treillis de Tamari, *Séminaire Lotharingien de combinatoire*, 55 (2006).
- [48] L. Carlitz, Enumeration of up-down sequences, *Discrete Math.*, 4 (1973), 273–286.
- [49] L. Carlitz, T. Vaughan, Enumeration of sequences of given specification according to rises, falls and maxima, *Discrete Math.*, 8 (1974), 147–167.
- [50] K. Chaudhuri, K. Chen, R. Mihaescu, and S. Rao, On the tandem duplication-random loss model of genome rearrangement, In *Proceedings of the seventeenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithm*, p. 564–570. ACM New York, NY, USA, 2006.
- [51] H. D. Chen, W. L. Fan, S. G. Kong, H. Lee, B. Zheng, and N. Zhou, Inverse symmetry in genomes and whole-genome inverse duplication, In *International Bioinformatics Workshop (IBW2008)*. Yunnan University, Kunming, Yunnan, China, 2008.
- [52] M. C. Chen and R. C. T. Lee, Sorting by transpositions based on the first increasing substring concept, In *BIBE’04 Proceedings of the 4th IEEE Symposium on Bioinformatics and Bioengineering*, page 553, Washington, DC, USA, 2004. IEEE Computer Society.
- [53] Y.J. Chen, J.M. Chang, Y.L. Wang, An efficient algorithm for estimating rotation distance between two binary trees, *Intern. J. Comput. Math.*, 82 (2005) 1095–1106.

- [54] T. Chow and J. West, Forbidden sequences and Chebyshev polynomials, *Disc. Math.*, 204 (1999), 119–128.
- [55] S. Cleary, Restricted rotation distance between binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 84 (2002), 333–338.
- [56] S. Cleary, J. Taback, Bounding restricted rotation distance, *Inform. Process. Lett.*, 88 (2003), 251–256.
- [57] W. Chu, Ch. Colbourn and P. Dukes. Constructions for permutation codes in power-line communications. *Designs, Codes and Cryptography*, 32 (2004), 51–64.
- [58] L. Comtet, *Advanced Combinatorics : The Art of Finite and Infinite Expansions*, Reidel, Dordrecht, Holland, 1974.
- [59] K. Cukik and D. Wood, A note on some tree similarity measures, *Inform. Process. Lett.*, 15 (1982), 39–42.
- [60] B.A. Davey, H.A. Priestley, *Introduction to lattices and order*, Cambridge university press, 2002.
- [61] E. Dedó, D. Torri and N. Zagaglia Salvi, The observability of the Fibonacci and the Lucas cubes, *Combinatorics '98 (Palermo). Discrete Math.*, 255(1-3) (2002), 55–63.
- [62] A. Del Lungo, A. Frosini, and S. Rinaldi, ECO method and the exhaustive generation of convex polyominoes. *DMTCS*, (2003), 103–116.
- [63] E. Deutsch : Private communication, 2008.
- [64] E. Deutsch, L. Ferrari, and S. Rinaldi, Production matrices. *Advances in Applied Mathematics*, 34 (2005), 101–122.
- [65] E. Duchi, A. Frosini, R. Pinzani, and S. Rinaldi, A note on rational succession rules. *Journal of Integer Sequences, Article 03.1.7*, 6 (2003).
- [66] D. Duffus Matching in modular lattice, *J. Combin. Theory*, 32 (1982), 303–314.
- [67] W.M.B. Dukes, M. F. Flanagan, T. Mansour, V. Vajnovszki, Combinatorial Gray codes for classes of pattern avoiding permutations, *Theoretical Computer Sciences*, 396 (2008), 35–49.
- [68] P.H. Edelman, Chain enumeration and noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 31 (1980), 171–180.
- [69] P.H. Edelman and R. Simion, Chains on the lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 126 (1994), 107–119.
- [70] S. Effler and F. Ruskey, A CAT algorithm for generating permutations with a fixed number of inversions, *Information Process. Letters*, 86 (2003), 107–112.
- [71] E. Egge and T. Mansour, Restricted permutations, Fibonacci numbers, and k -generalized Fibonacci numbers, *Integers Electronic Journal of Combinatorial Number Theory, Article A01*, 5 (2005).
- [72] R. Ehrenborg and E. Steingrímsson, The excedance set of a permutation, *Advances in Applied Mathematics*, 24 (2000), 284–299.
- [73] L. Ferrari, E. Pergola, R. Pinzani, and S. Rinaldi, An algebraic characterization of the set of succession rules, *Theoretical Computer Science*, 281 (2002), 351–367.

- [74] L. Ferrari, E. Pergola, R. Pinzani, and S. Rinaldi, Jumping succession rules and their generating functions, *Discrete Math.*, 271 (2003), 29–50.
- [75] L. Ferrari and R. Pinzani, Lattices of lattice paths, *J. Stat. Plan. Inference*, 135 (2005), 77–92.
- [76] G. Firro and T. Mansour, Restricted permutations and polygons, *The Third International Conference on Permutations Patterns, Gainsville, Florida.*, March 7-11, 2005.
- [77] P. Flajolet and R. Sedgewick, *Introduction à l'analyse des algorithmes*, Thomson Publishing, 1996.
- [78] D. Foata and M.P. Schützenberger, Théorie géométrique des polynômes Eulériens, *Lectures Notes in Mathematics*, 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
- [79] H. Friedman, D. Tamari, Problèmes d'associativité : une structure de treillis fini induite par une loi de demi-associative, *J. Comb. Theory*, 2 (1967), 215–242.
- [80] R.G. Gallager, Information Theory and Reliable Communications, *J. Wiley*, New York, (1968).
- [81] C. Germain and J.M. Pallo, Two shortest path metrics on well-formed parentheses strings, *Inform. Process. Lett.*, 60 (1996), 283–287.
- [82] C. Germain and J.M. Pallo, The number of coverings in four Catalan lattices, *Intern. J. Computer Math.*, 61 (1996), 19–28.
- [83] G. Grätzer, *General Lattice Theory*, Birkäuser Verlag, Basel, 1998.
- [84] F. Gray, Pulse code communication, *U.S. Patent 2632058*, (1953).
- [85] O. Guibert, Combinatoire des permutations à motifs exclus en liaison avec mots, cartes planaires et tableaux de Young, *PhD thesis, Université Bordeaux 1, 1995*.
- [86] A.J. Guttmann, C. Krattenthaler and X.G. Viennot, Vicious walkers, friendly walkers and Young tableaux II :between two walls, *Journal of Statistical Physics*, 110 (2003), 1069–1086.
- [87] M. T. Hallett and J. Lagergren, New algorithms for the duplication-loss model, In *Proceedings of the fourth annual international conference on Computational molecular biology*, pages 138–146. ACM New York, NY, USA, 2000.
- [88] S. Hanke, T. Ottmann, S.J. Schuierer, The edge-flipping distance of triangulations, *J. Univers. Comp. Sci.*, 2 (1996), 570–579.
- [89] A. Hodges, *A. Turing, The Enigma*, Simon & Schuster Vintage edition, 1992.
- [90] W-J. Hsu, Fibonacci cubes – a new interconnection topology, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 4(1) (1993), 3–12.
- [91] S.M. Johnson, Generation of permutations by adjacent transpositions, *Mathematics of computation*, 17 (1963), 282–285.
- [92] A. Juarna and V. Vajnovszki, Some generalizations of a Simion-Schmidt bijection, *The Computer Journal*, 50 (2007), 574–580.
- [93] A. Juarna and V. Vajnovszki, More about a Simion-Schmidt's bijection, *Preprint*.
- [94] A. Juarna and V. Vajnovszki, Isomorphism between classes counted by Fibonacci numbers, *Words*, 36 (2005), 51–62, September 13 - 17.

- [95] S. Kitaev, Introduction to partially ordered patterns, *Discrete Applied Mathematics*, 155 (2007), 929–944.
- [96] S. Kitaev, T. Mansour, Partially ordered generalized patterns and k -ary words, *Ann. Comb.*, 7(2) (2003), 191–200.
- [97] S. Kitaev and A. Pyatkin, On avoidance of V - and Λ -patterns in permutations, *To appear in Ars Combinatoria*, 2009.
- [98] D.E. Knuth, *The art of computer programming, combinatorial algorithms*, volume 4. Pre-fascicle 2b, (Generating all permutations), 2002.
- [99] D.E. Knuth, *Fundamental Algorithms*, vol. 1., Addison-Wesley, 1997.
- [100] J.F. Korsh, Loopless generation of up-down permutations, *Discrete Math.*, 240(1-3) (2001), 97–122.
- [101] J.F. Korsh, Constant time generation of derangements, *Information Process. Letters*, 90(4) (2004), 181–186.
- [102] D. Kremer, Permutations with forbidden subsequences and a generalized Schröder number, *Disc. Math.*, 218(1-3) (2000), 121–130.
- [103] G.J. Kreweras, Sur les partitions noncroisées d’un cycle, *Discrete Math.*, 1 (1972), 333–350.
- [104] J.P.S. Kung, Matching and Radon transforms in lattices, *Order*, 2 (1985), 105–112.
- [105] A. Labarre, New bounds and tractable instances for the transposition distance, *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics (TCBB)*, 3(4) (2006), 380–394.
- [106] J.C. Lagarias and D.P. Weisser, Fibonacci and Lucas cubes, *Fibonacci Quart.*, 19(1) (1981), 39–43.
- [107] J. Liu, W-J. Hsu and M.J. Chung, Generalized Fibonacci cubes are mostly Hamiltonian, *Journal of Graph Theory*, 18(8) (1994), 817–829.
- [108] M. Lothaire, *Combinatorics on words. Encyclopedia of Mathematics and its applications*, 17, Addison-Wesley, 1983.
- [109] J.M. Lucas, Untangling binary trees via rotations, *Comput. J.*, 47 (2004), 259–269.
- [110] J.M. Lucas, A direct algorithm for restricted rotation distance, *Inform. Process. Lett.*, 90 (2004), 129–134.
- [111] F. Luccio, L. Pagli, On the upper bound of the rotation distance of binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 31 (1989), 57–60.
- [112] T. Mansour, Restricted 132-avoiding k -ary words, Chebyshev polynomials, and continued fractions, *Adv. in Appl. Math.*, 36(2) (2006), 175–193.
- [113] T. Mansour, Permutations avoiding a pattern from S_k and at least two patterns from S_3 , *Ars Combin.*, 62 (2002), 227–239.
- [114] T. Mansour, V. Vajnovszki, Restricted 123-avoiding Baxter permutations and the Padovan numbers, *Discrete Applied Mathematics*, 155(11) (2007), 1430–1440.
- [115] T. Mansour, S.H.F. Yan, Minimal permutations with d descents, *European journal of combinatorics*, 31 (2010), 1445–1460.

- [116] R. Mantaci and F. Rakotondrajao, A permutation representation that knows what 'Eulerian' means, *Discrete Math. and Theo. Comput. Science*, 4 (2001), 101–108.
- [117] B. Monjardet, Metrics on partially ordered sets-A survey, *Discrete Math.*, 35 (1981), 173–184.
- [118] E. Munarini, C. Perelli Cippo and N. Zagaglia Salvi, On the Lucas cubes, *Fibonacci Quart.*, 39(1) (2001), 12–21.
- [119] A. Nijenhuis and H.S. Wilf, *Combinatorial Algorithms for Computers and Calculators*, Academic Press, 1978.
- [120] J. Noonan, The number of permutations containing exactly one increasing subsequence of length three, *Discrete Math.*, 152 (1996), 307–313.
- [121] R. Nussinov, Some indications for inverse DNA duplication, *Journal of theoretical biology*, 95(4) (1982), 783.
- [122] J.M. Pallo, Enumerating, ranking and unranking binary trees, *The Computer Journal*, 29 (1986), 171–175.
- [123] J.M. Pallo, On the rotation distance in the lattice of binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 25 (1987), 369–373.
- [124] J.M. Pallo, A distance metric on binary trees using lattice-theoretic measures, *Inform. Process. Lett.*, 34 (1990), 113–116.
- [125] J.M. Pallo, An algorithm to compute the Möbius function of the rotation lattice of binary trees, *RAIRO Informatique Théorique et Applications*, 27 (1993), 341–348.
- [126] J.M. Pallo, An efficient upper bound of the rotation distance of binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 73 (2000), 87–92.
- [127] J.M. Pallo, Generating binary trees by Glivenko classes on Tamari lattices, *Inform. Process. Lett.*, 85 (2003), 235–238.
- [128] J.M. Pallo, Right-arm rotation distance between binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 87 (2003), 173–177.
- [129] J.M. Pallo, Enumerating, ranking and unranking binary trees, *The Computer Journal*, 29 (1986), 171–175.
- [130] J.M. Pallo, On the rotation distance in the lattice of binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 25 (1987), 369–373.
- [131] J.M. Pallo, An algorithm to compute the Möbius function of the rotation lattice of binary trees, *RAIRO Informatique Théorique et Applications*, 27 (1993), 341–348.
- [132] J.M. Pallo, An efficient upper bound of the rotation distance of binary trees, *Inform. Process. Lett.*, 73 (2000), 87–92.
- [133] J.M. Pallo and V. Vajnovszki, Parallel algorithms for listing well-formed parentheses strings, *Parallel Process. Lett.*, 8 (1998), 19–28.
- [134] D.S. Parker, P. Ram, The construction of Huffman codes is a submodular ("convex") optimization problem over a lattice of binary trees, *SIAM J. on Computing*, 28 (1999), 1875–1905.
- [135] M. Poneti, V. Vajnovszki, Generating restricted classes of involutions, Bell and Stirling permutations, *European Journal of Combinatorics*, 31 (2010), 553–564.

- [136] G. Pruesse and F. Ruskey, Generating linear extensions fast, *SIAM J. Comput.*, 23 (1994), 373–386.
- [137] V. Reiner, Noncrossing partitions for classical reflection groups, *Discrete Math.*, 177 (1997), 195–222.
- [138] K. Reuter, Matching for linearly indecomposable modular lattices, *Discrete Math.*, 63 (1987), 245–247.
- [139] R. Rieper and M. Zeleke, Valleyless sequences, *ArXiv :math/0005180*, 2000.
- [140] J. Riordan. An introduction to combinatorial analysis. *New York, J. Wiley*, 1958.
- [141] R.O. Rogers, On finding shortest paths in the rotation graph of binary trees, *Congr. Numer.*, 137 (1999), 75–95.
- [142] R.O. Rogers, R.D. Dutton, On distance in the rotation graph of binary trees, *Congr. Numer.*, 120 (1996), 103–113.
- [143] D. Roelants van Baronaigien. Constant time generation of involutions. *Congressus Numerantium*, 90 (1992), 87–96.
- [144] D. Roelants van Baronaigien and F. Ruskey, Generating permutations with given ups and downs, *Disc. Appl. Math.*, 36(1) (1992), 57–65.
- [145] D.P. Roselle, Permutations by number of rises and successions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 20 (1968), 8–16.
- [146] A.A. Ruiz, F. Luccio, A.M. Enriquez, L. Pagli, k -restricted rotation with an application to search tree rebalancing, 9th WADS, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 3608 (2005), 2–13.
- [147] F. Ruskey and T.C. Hu, Generating binary trees lexicographically, *SIAM J. on Computing*, 6(4) (1977), 745–758.
- [148] F. Ruskey and U. Taylor, Fast generation of restricted classes of permutations, *Manuscript*, 1995.
- [149] F. Ruskey, <http://www.theory.cs.uvic.ca/~cos/gen/perm.html>.
- [150] F. Ruskey, Simple combinatorial Gray codes constructed by reversing sublists in ISAAC conference, *Lecture notes in computer Science*, 762 (1993), 201–208, Berlin Springer.
- [151] F. Ruskey and S. Effer, A CAT algorithm for generating permutations with a fixed number of inversions, *Inform. Process. Lett.*, 86(2) (2003), 107–112.
- [152] F. Ruskey and D. Roelants van Baronaigien, Generating permutations with given ups and downs, *Discrete Appl. Math.*, 36(1) (1992), 57–67.
- [153] D. Sankoff, Gene and genome duplication, *Current Opinion in Genetics and Development*, 11 (2001), 681–684.
- [154] C. Savage, A Survey of Combinatorial Gray Codes, *Society of Industrial and Applied Mathematics*, 39 (1997), 605–629.
- [155] R. Sedgewick, Permutation generation methods, *Comput. Surveys*, 9(2) (1977), 137–164.
- [156] L.W. Shapiro, A Catalan triangle, *Discrete Math.*, 14 (1976), 83–90.

- [157] L. W. Shapiro, W.-J. Woan, and S. Getu, Runs, slides and moments, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods*, 4(461) (1983).
- [158] R. Simion and D. Ullman, On the structure of lattice of noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 98 (1991), 193–206.
- [159] R. Simion, Noncrossing partitions, *Discrete Math.*, 217 (2000), 367–409.
- [160] R. Simion and F.W. Schmidt, Restricted permutations, *Eur. J. Comb.*, 6 (1985), 383–406.
- [161] D.D. Sleator, R.E. Tarjan and W.P. Thurston, Rotation distance, triangulations and hyperbolic geometry, *J. Amer. Math. Soc.*, 1 (1988), 647–681.
- [162] N.J.A. Sloane, The On-line Encyclopedia of Integer Sequences, available electronically at <http://www.research.att.com/~njas/sequences>.
- [163] Z. Stankova, Forbidden subsequences, *Discrete Math.*, 132(1-3) (1994), 291–316.
- [164] R.P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, volume 2. Cambridge University Press, 1999.
- [165] R. Stanley. *Enumerative combinatorics*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1997.
- [166] H.F. Trotter, *PERM (Algorithm 115)*, Communications of ACM, 5(8) (1962), 434–435.
- [167] V. Vajnovszki, A loopless generation of bitstrings without p consecutive ones, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, Springer (2001), 227–240.
- [168] V. Vajnovszki, Gray visiting Motzkins, *Acta Informatica*, 38 (2002), 793–811.
- [169] V. Vajnovszki, A loopless algorithm for generating the permutations of a multiset, *Theoretical Computer Science*, 307 (2003), 415–431.
- [170] V. Vajnovszki, More restrictive Gray codes for necklaces and Lyndon words, *Information Processing Letters*, 106 (3) (2008), 96–99.
- [171] V. Vajnovszki, Gray code order for Lyndon words, *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 9 (2) (2007), 145–152.
- [172] V. Vajnovszki, A Loopless Algorithm for Generating the Permutations of a Multiset, *Theoretical Computer Science*, 307 (2003), 415–431.
- [173] V. Vajnovszki, Generating a Gray Code for P-sequences, *The Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, 1 (2002), 31–41.
- [174] T.R. Walsh, Gray code for involutions, *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 36 (2001), 95–118, 2001.
- [175] T.R. Walsh, Generating Gray codes in $O(1)$ worst-case time per word, *DMTCS03, Lect. Notes Comput. Sci. 2731*, Springer (2003), 72–88.
- [176] J. West, Generating trees and the Catalan and Schröder numbers, *Disc. Math.*, 146 (1994), 247–262.
- [177] J. West, Generating trees and forbidden subsequences, *Discrete Mathematics*, 157(1-3) (1996), 363–374.
- [178] H.S. Wilf, Ascending subsequences of permutations and the shapes of tableaux, *J. Combin. Theory Ser. A*, 60(1) (1992), 155–157.

- [179] R.M. Wilson and J.H. van Lint. *A course in Combinatorics*. Cambridge University Press, 2002.
- [180] J. Wu, Extended Fibonacci cubes, *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems*, 8(12) (1997), 1203–1210.

