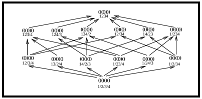
Relation binaire, relation d'ordre, treillis

J.L. Baril

Université de Bourgogne
Labo. Le2i, UMR-CNRS 5158
http://jl.baril.u-bourgogne.fr

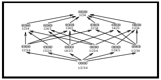
February 29, 2016



Treillis et algèbres de Boole

1. **Relations binaires**
2. **Relations d'équivalences**
3. **Relations d'ordres**
4. **Treillis**
5. **Algèbres de Boole**

Relation binaire



Soient E et F deux ensembles.

Définitions :

Une relation binaire de E vers F est une partie $\mathcal{R}$ de $E \times F$. Si $(x, y) \in \mathcal{R}$ alors on dit que x est en relation avec y et on note cela $x\mathcal{R}y$. Dans le cas ou $E = F$ on dit que $\mathcal{R}$ est définie sur E.

Remarque: représentation par diagramme sagittal, matrice

Exemples : $\mathcal{R} = \emptyset$ ou $\mathcal{R} = E \times F$.

$X = \{a, b, c\}$ et $Y = \{e, f, g\}$ et $\mathcal{R} = \{(a, e), (a, f), (a, g)\}$.

$\mathcal{R} = [1, 10] \times [-1, 30]$ est une relation binaire de $[0, 20] \times [-2, 32]$.

$x\mathcal{R}y$ si y est le carré de x.

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers F. On appelle relation réciproque de $\mathcal{R}$ et on note $\mathcal{R}^{-1}$ la relation binaire de F vers E définie par : $\forall (x,y) \in E \times F, y\mathcal{R}^{-1}x \iff x\mathcal{R}y$.

Exemple : Si $X = \{a,b,c\}$ et $Y = \{e,f,g\}$ et $\mathcal{R} = \{(a,e),(a,f),(a,g)\}$ alors $\mathcal{R}^{-1} = \{(e,a),(f,a),(g,a)\}$.
Trouver la relation réciproque de $x\mathcal{R}y$ si y est le carré de x.

Définition :

Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers F et $\mathcal{S}$ une relation binaire de F vers G. La composée $\mathcal{T}$ de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est une RB de E vers G notée $\mathcal{T} = \mathcal{R}\mathcal{S}$ est définie par: $\forall (x,y) \in E \times G$,
$x\mathcal{T}y \iff$ *il existe* $z \in F$ *tq* $x\mathcal{R}z$ *et* $z\mathcal{S}y$.

Remarque : La composition est associative: $(\mathcal{R}\mathcal{S})\mathcal{T} = \mathcal{R}(\mathcal{S}\mathcal{T})$.
Trouver la composée de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{R}$ (cf ci-dessus)

Définition :

On dit qu'une RB $\mathcal{R}$ définie sur E est:

- réflexive si $\forall x \in E,\ x\mathcal{R}x$
- symétrique si $\forall (x,y) \in E \times E,\ x\mathcal{R}y \iff y\mathcal{R}x$.
- transitive si $\forall (x,y,z) \in E^3,\ x\mathcal{R}y \ et\ y\mathcal{R}z \iff x\mathcal{R}z$.
- antisymétrique si $\forall (x,y) \in E^2,\ x\mathcal{R}y \ et\ y\mathcal{R}x \implies x = y$.

Exemples : La relation $\leq$ est antisymétrique, réflexive, transitive sur l'ensemble des réels.

La relation de parité est symétrique, réflexive, transitive sur l'ensemble des entiers.

Quelles sont les propriétés de la relation $x\mathcal{R}y$ si y est le carré de x?

Relation d'équivalence

Définitions :

Une relation d'équivalence $\sim$ de E est une relation binaire de E réflexive, symétrique et transitive. Pour $x \in X$ donné, l'ensemble des éléments qui sont en relation avec lui est appelé sa classe d'équivalence $\bar{x} = \{z \in X,\ x \sim z\}$. Un élément $z \in \bar{x}$ est un représentant de la classe. L'ensemble des classes d'équivalence est appelé l'ensemble quotient noté $X/\sim := \{\bar{x}, x \in X\}$.

Remarque: Les classes forment une partition de X.
Trouver les classes d 'équivalences $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y$ multiple de x
Exemples : "=", Si $f : E \to F$ alors la relation $x \sim y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$ est une relation d'équivalence.
Exercice: Montrer que si f est indempotente ($f \circ f = f$) d'un ensemble E dans lui-même, la relation definie par $xRy \Longleftrightarrow y = f(x)$ est antisymétrique et transitive. A quelle condition sur f serait-elle réflexive?

Proposition : factorisation canonique

Toute fonction $f : E \to F$ est la composée d'une surjection, une bijection et une injection:

$$\begin{array}{llll} f : E \to & E/\sim & \to Im(f) & \to F \\ \quad x \to & \bar{x} & \to f(x) & \to f(x) \end{array}$$

Exemples : La fonction réelle $f : x \to x^2$ se factorise comme suit:

$$\begin{array}{llll} f : R \to & R/\sim & \to Im(f) = R^+ & \to R \\ \quad x \to & \bar{x} = \{-x, x\} & \to x^2 & \to x^2 \end{array}$$

On construit les rationnels avec les entiers grâce à la relation d'équivalence sur $Z \times Z^*$: $(x, y) \sim (u, v) \iff xv = yu$.

Exemples : Pour $n > 0$, l'ensemble des entiers modulo n est l'ensemble quotient $Z/nZ = Z/\sim$ ou $p \sim q \iff n \textit{ divise } p - q$. $Z/2Z = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, $Z/nZ = \{\bar{0}, \bar{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$.

Définition:

Soient deux ensembles munis d'une relation d'équivalence $\sim_E$ et $\sim_F$. Une fonction $f : E \to F$ passe au quotient si $x \sim_E y \iff f(x) \sim_F f(y)$ et cela permet de définir la fonction $\bar{f} : \bar{E} \to \bar{F}$ qui a $\bar{x}$ associe $\overline{f(x)}$.

Exemple : soit $A = R^2/\{0\}$ avec la relation $(x,y)\mathcal{R}(a,b) \iff$ il existe λ tel que $a = \lambda x \textit{ et } b = \lambda y$) montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) soit B l'ensemble des droites de R^2 passant par l'origine et f de A vers B définie par f(x,y) est la droite passant par (x,y) et 0. Montrer que f passe au quotient relativement à $\mathcal{R}$.

Relation d'ordre

Définition:

Une relation sur X $\sim$ qui est **réflexive**, **antisymétrique et transitive** est appelée une relation d'ordre.
On dit alors que X est **partiellement ordonnée** et on note $\leq$ à la place de $\sim$.
Si $(x,y) \in X^2$, x et y seront **comparables** si $x \leq y$ ou $y \leq x$.
Si tous les éléments de X sont comparables, on dit que l'**ordre est total**.
Si $x \leq y$ et $x \neq y$ alors on note $x < y$.
On dit que y **couvre** x (y est un **successeur** de x) si $x < y$ et s'il n'existe pas d'éléments entre eux, i.e.
$x \leq z \leq y \Longrightarrow x = z \; ou \; z = x$.

l'inclusion $\subset$ sur les parties d'un ensemble E
N,Z,Q,R sont totalement ordonnés par $\leq$
Est-ce que $<$ est un ordre sur R?
La relation a divise b dans N est elle un ordre partiel?

Si X est fini, son **diagramme de Hasse** est le graphe orienté dont les sommets sont les éléments de X et les arêtes représentées du bas vers le haut sont les couples (x, y) ou y couvre x.

Exemple: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ et $a \leq b$, $a \leq c$, $b \leq d$, $c \leq d$, $d \leq e$, $d \leq f$.

Exemple: "Bons parenthésages" de longueurs $2n$ munis de la transformation ....)(.... $\Longleftarrow$ ....()....

Exemple: $a \leq b$ si a divise b dans N . Que se passe t il dans Z?

$u \leq v$ si $||u|| \leq ||v||$ pour u et v vecteurs du plan

Définition:

Si l'ordre est total sur X, le diagramme de Hasse s'appelle une chaine. Un sous ensemble ou aucune paire n'est comparable est une anti-chaine.

L'intervalle $[x, y] \subset X$ est l'ensemble des éléments comparables à x et y et compris entre eux.
$[x, y] = \{z \in X, \; x \leq z \leq y\}$

Le **minimum** (ou **plus petit élément** d'un ensemble X) est un élément qui est plus petit ou égal à tous les autres.
$m = min(X) \Longleftrightarrow m \in X \; et \; \forall x \in X, \; m \leq x.$

Un ensemble X est totalement ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

Relation d'ordre

Le **maximum** (ou **plus grand élément** d'un ensemble X) est un élément qui est plus grand ou égal à tous les autres.
$M = max(X) \Longleftrightarrow M \in X \ et \ \forall x \in X, \ x \leq M$.
Un ensemble X est totalement ordonné si toute partie non vide admet un plus grand élément.
Un élément m est **minimal** s'il est plus petit ou égal à tous ceux qui lui sont comparables dans X.
Un élément $m \in X$ est un **minorant** de Y dans X s'il est plus petit que tous les éléments de Y.
La **borne inférieure** de Y dans X, notée $inf_X(Y)$, est s'il existe le plus grand des minorants de Y. Si Y admet un minimum c'est aussi la borne inférieure.

Exemples

$I = [1, 100]$ admet un plus petit element ...
$I = [1, 100[$???
sur N, $a \leq b$ si b multiple de a: plus petit element 1 et O est le plus grand element!
Meme relation sur $F = \{2, 3, 5, 7, 8, 10\}$ plus petit majorant? le plus grand minorant?
Maintenant avec $G = \{3, 9, 27, 243\}$ majorant? plus grand element de G? minorants? plus petit element?
$F = \{x^2/(x^2 + 1), x \in R\}$ majorant? plus petit majorant?plus grand element de F? plus grand minorant? plus petit element de F?

Treillis

Definition

Un **treillis** est un ensemble partiellement ordonné ou tout couple (x, y) admet une borne supérieure et une borne inférieure.

On note $a \vee b$ la **borne supérieure**, et $a \wedge b$ la **borne inférieure** de a et b.
* L'inclusion est une relation d'ordre partiel sur les parties d'un ensemble: $X = \{a, b, c\}$
* Les entiers naturels peuvent être munis d'un ordre plus subtil que l'ordre usuel
q est plus grand que p si q est multiple de p. , D_{48} est un treillis

Définition

Si $(X, \leq)$ est un treillis et $Y \subset X$, alors Y est un sous treillis de X ssi $\forall (a, b) \in Y^2,\ a \wedge b \in Y \text{ et } a \vee b \in Y$.

Exemple: L'ensemble des diviseurs de n est un sous treillis de $(N, divise)$ si n divise N.

Définition

Soient $(X, \leq)$ et $(Y, \leq)$ deux treillis alors f une fonction de X dans Y est un morphisme de treillis ssi:
$\forall (x, y) \in X^2\ f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ et $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$.

Remarque: Si f est un morphisme de treillis alors f est croissante
Si f est croissante et surjective alors f est un morphisme de treillis

Définition

un morphisme bijectif entre deux treillis est un isomorphisme de treillis

Exemple: $A = \{a, b\}$, $(\mathcal{P}(A), \subset)$ et $(D_{10}, divise)$
Si $f(\emptyset) = 1,\ f(a) = 2,\ f(b) = 5,\ f(a, b) = 10$ alors f est un isomorphisme de treillis.

Treillis

Propriétés si $(x, y, z) \in E^3$ ou $(E, \leq)$ est un treillis, alors

$x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ idempotence

$x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$ commutativité

$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$ associativité

$x \leq y \iff x \vee y = y$ consistence

$x \wedge (x \vee y) = x$ absorption

$x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

$x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Définition

Un treillis est dit borné ssi il admet un élément maxi (noté 1) et mini (noté 0). On dit qu'un élément a admet un complément ssi il existe b tel que $a \wedge b = 0$ et $a \vee b = 1$. Un treillis borné est alors complémenté ssi tout élément adment un complément.

Exemple: $(\mathcal{P}(A), \subset)$

Propriété

Tout treillis fini est borné

Définition

Un treillis est dit distributif ssi on a pour tout x, y, z,
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ et
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Remarque: la première condition implique la seconde
Exemple : $(\mathcal{P}(A), \subset)$, $(N, divise)$

proposition

Un treillis est distributif ssi on peut simplifier comme suit:
$\forall a, b, c,\ a \wedge c = b \wedge c \ et\ a \vee c = b \vee c \Longrightarrow a = b$

Corollaire

Tout élément d'un treillis distributif complémenté possède un complément unique.

Définition

Une algèbre de Boole est la donnée d'un treillis distributif complémenté possédant au moins deux éléments On appelle alors atome tout élément minimal différent de 0.

Exemples : $(\mathcal{P}(A), \subset)$, $B_n = \{0, 1\}^n$ avec la relation d'ordre adequat,
Faire des diagrammes de Hasse

Théorème

Tout algèbre de Boole finie est isomorphe à $(\mathcal{P}(A), \subset)$ ou A est l'ensemble de ses atomes

Corollaire

Le cardinal de toute algèbre de Boole finie est une puissance de 2

Loi de de Morgan

$a \mathbin{\overline{\vee}} b = \bar{a} \wedge \bar{b}$ et $a \mathbin{\overline{\wedge}} b = \bar{a} \vee \bar{b}$

On note $B = \{0, 1\}$

Définition

Une **fonction booléenne d'arité** n est une fonction de B^n vers B. On note F_n l'ensemble des fonctions booléennes d'arité n

Remarque: Il y a 2^n $n-$uplets de 0 et 1, donc il y a 2^{2^n} fonctions booléennes d'arité n.
Par exemple F_1 possède 4 fonctions.
Représentation d'une fonction Booléenne $\Longrightarrow$ Table de Vérité
Exemple: Donner la table de vérité de la fonction Booléenne d'arité 2 suivante: $(a_1, a_2) \to a_1 + a_2$.
L'ensemble des fonctions booléennes est une algèbre de Boole.

Electronique

d=sup(a,inf(b,c)) pour le circuit suivant

/ Entree——————————/ A———————————-Sortie — — — / /

— ————-/ B——————-/ C——