TP 5 - Suites et fonctions

Les suites

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \frac{1}{2\sqrt{n+u_n}}$. À l'aide de la fonction *isolate*, exprimer u_n en fonction de n, puis calculer sa limite à l'infini.

Exercice 2. À l'aide de la fonction *rsolve*, trouver le terme général de la suite récurrente $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = -4 \\ u_1 = -2 \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n,\ \forall n \geq 2. \end{cases}$$

Exercice 3. Calculer la limite des suites suivantes :

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^{k/2^k}, \quad v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}, \quad \text{et} \quad w_n = \int_0^n \frac{dx}{1+x^2}.$$

Exercice 4. La suite de Fibonacci $(f_n)_{n\geq 0}$ est définie par $f_0 = f_1 = 1$, et $\forall n \geq 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Trouver l'expression de u_n en fonction de n à l'aide de la fonction *rsolve*. Utiliser *makeproc* pour créer une procédure de paramètre n et qui renvoie la valeur de f_n.

Les fonctions

Une manière de définir les fonctions en Maple est la suivante:

> $f := x \rightarrow \mathrm{sqrt}(x-1)$

$$f := x \mapsto \sqrt{x-1}$$

> $g := (x, y) \rightarrow x^2 - y^2$

$$g := (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Exercice 5. On rappelle le théorème des accroissements finis.

Théorème (des accroissements finis)**.** *Soit $a < b$ deux réels, et $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

1. À l'aide du théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, il existe un unique réel $c(x) \in]0, 1[$ tel que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2\sqrt{1 + x \cdot c(x)}}.$$

2. Déterminer l'expression de $c(x)$ en fonction de x, puis sa limite en $x = 0$.

Exercice 6. Soit f la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ f(x) = \frac{5 \sin x}{x}$. Dessiner la représentation graphique sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ de la fonction f prolongée par continuité en 0.

Exercice 7. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x \ln x}$.
1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Tracer sa courbe réprésentative sur ce domaine, puis rajouter sur ce graphique la droite d'équation $y = x$.
3. Calculer la limite à l'infini de $f(x) - x$, que remarque-t-on ?
4. Préciser le comportement de f en $0, 1$ et $+\infty$.
5. Trouver le minimum de f et étudier ses variations.