Relations d'équivalence - Treillis - TP

Université de Bourgogne - Licence 2 - Dépt IEM

Exercice 1 : Relation Soit B_n l'ensemble des mots binaires de taille n. On dit que deux mots m_1, m_2 sont équivalents s'il existe une décomposition de $m_1 = uv$ telle que $m_2 = vu$ ou u et v sont des mots éventuellements vides.

- Compter le nombre de classes d'équivalences de B_n muni de cette relation d'équivalence.

- Pour chaque classe d'équivalence, donner le plus petit mot (non périodique) en ordre lexicographique qui lui appartient (appelé mot de Lyndon). Nota bene: un mot périodique est un mot pouvant s'écrire $m = u^k$ pour $k \geq 2$.

- Construire un cycle universel pour les suites binaires de taille n (il suffit de concaténer par ordre lexicographique les mots de Lyndon de tailles k ou k divise n).

Exemple: Si $n = 4$ les mots de Lyndon de taille divisant 4 sont: 0 0001 0011 01 0111 1

Exercice 2 : Treillis Soit X l'ensemble des bons parenthésages de taille 6. Exemple: ()()() ou (())(). On dit qu'un parenthésage couvre un autre si le premier se transforme en le deuxième par une transformation $)(---> ()$.

- En considérant le nombre de parenthèses ouvrantes situées avant chaque parenthèses fermantes, donnez un algorithme permettant de générer une et une seule fois tous les codes des bons parenthèsages de taille $2n$.

- En déduire un algorithme permettant d'afficher tous les bons parenthèsages d'une taille donnée.

- Donner une procédure permettant de trouver le sup et l'inf de deux éléments quelconque.

- Donner un algorithme permettant de calculer le nombre minimum de transformations nécessaires pour transformer un parenthèsages p_1 en un autre p_2. La distance est donnée par la

$$d(p_1, p_2) = rg(p_1) + rg(p_2) - 2rg(inf(p_1, p_2))$$

où le rang $rg(p)$ d'un parenthèsage p est la somme des éléments du code moins $\frac{n(n+1)}{2}$.